Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

Νήσος Μύκονος (εν πλῷ από Χίο για Σάμο), Σεπτέμβριος του 2016

Το θεώρημα της μεταφοράς και οι εφαρμογές του στην ύπαρξη ή μη ορίου συνάρτησης

Γενική παρατήρηση.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α. Υποθέτουμε ακόμα ότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ (γενικότερα τα $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$).
Είναι γνωστό ότι : το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν $\ell_1 = \ell_2$.
Αν, επομένως, αποδείξουμε ότι $\ell_1 \neq \ell_2$, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Παρανόηση.
Οι μαθητές της Γ Λυκείου μπορούν πάρα πολύ εύκολα να χρησιμοποιούν τα παραπάνω για την επίλυση ασκήσεων. Γίνεται όμως η εξής παρανόηση. Τα παιδιά νομίζουν ότι η μοναδική περόπτωση για να μην έχει μια συνάρτηση όριο είναι : να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να μην είναι ίσα.
Αυτό βέβαια δεν είναι σωστό, όπως θα δούμε πιο κάτω. Κάτι τέτοιο συμβαίνει γιατί δεν έχουν το κατάλληλο εργαλείο (το θεώρημα της μεταφοράς) για να αντιμετωπίσουν αυτή την κατάσταση.

Θεώρημα (της μεταφοράς).
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α.
Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

(Α). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ όταν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in A)\ \left[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right]$

(Β). **Για κάθε** ακολουθία $(x_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in A, \nu \in \mathbb{N}$, $x_\nu \neq x_0, \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim x_\nu = x_0$, ισχύει $\lim f(x_\nu) = \ell$

Ορισμός.
Αν ισχύει οποιοδήποτε από τα (Α), (Β), τότε λέμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Παρατηρήσεις πάνω στο παραπάνω θεώρημα.

(Α). Το παραπάνω θεώρημα λέγεται «θεώρημα της μεταφοράς» γιατί στην ουσία μεταφέρει το όριο συνάρτησης σε όριο ακολουθιών. Κάτι τέτοιο είναι πολύ σημαντικό , γιατί στις ακολουθίες οι όροι είναι διακριτοί (δεν αποτελούν συνεχές πεδίο). Αυτό είναι αρκετά χρήσιμο, αφού ο ανθρώπινος νους δεν αντιλαμβάνεται εύκολα τα συνεχή μεγέθη, σε αντίθεση μα τα διακριτά.

(Β). Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει άλλο ένα εργαλείο για να αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Συγκεκριμένα αν βρούμε δυο ακολουθίες

- $(x_\nu),\ \nu\in\mathbb{N}$ με $x_\nu \in A,\ \nu\in\mathbb{N}$, $x_\nu \neq x_0,\ \nu\in\mathbb{N}$ και $\lim x_\nu = x_0$
- $(y_\nu),\ \nu\in\mathbb{N}$ με $y_\nu \in A,\ \nu\in\mathbb{N}$, $y_\nu \neq x_0,\ \nu\in\mathbb{N}$ και $\lim y_\nu = x_0$

αλλά $\lim f(x_\nu) \neq \lim f(x_\nu)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Άσκηση.

Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} συν\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

Λύση

Θεωρούμε την ακολουθία $x_\nu = \left(\dfrac{1}{2\nu\pi}+1\right)^2,\ \in\mathbb{N}$, με :

- $x_\nu \in= (0,1)\cup(1,+\infty)$
- $\lim x_\nu = 1$

$$συν\frac{1}{\sqrt{x}-1}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1}=2\nu\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\nu\pi}+1=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2\nu\pi}+1\right)^2$$

Θεωρούμε επίσης την ακολουθία $y_\nu = \left(\dfrac{1}{(2\nu+1)\pi}+1\right)^2,\ \in\mathbb{N}$, με :

- $y_\nu \in= (0,1)\cup(1,+\infty)$
- $\lim y_\nu = 1$

$$συν\frac{1}{\sqrt{x}-1}=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1}=(2\nu+1)\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(2\nu+1)\pi}+1=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{(2\nu+1)\pi}+1\right)^2$$

Όμως $f(x_\nu) = συν\dfrac{1}{\sqrt{x_\nu}-1} =$

$$f(x_\nu) = συν\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\nu\pi}+1\right)^2}-1} =$$

$$= συν\frac{1}{\frac{1}{2\nu\pi}} = συν2\nu\pi = 1,$$ οπότε και $\lim f(x_\nu) = 1$

Επίσης

$$f(y_\nu) = συν\frac{1}{\sqrt{y_\nu}-1} = συν\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{(2\nu+1)\pi}+1\right)^2}-1} = συν\frac{1}{\frac{1}{(2\nu+1)\pi}} = συν(2\nu+1)\pi = -1,$$ οπότε

και $\lim f(y_\nu) = -1$.

Επειδή $\lim f(x_\nu) \neq \lim f(x_\nu)$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} συν\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.