Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

Σάμος, Φθινόπωρο του 2016

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πρόλογος : Η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση έχουν πλήθος εφαρμογών. Παρόλα αυτά στα Σχολεία επιμένουμε σε ανούσιες και χωρίς κανένα Μαθηματικό περιεχόμενο ασκήσεις του τύπου :

(1) Να λυθεί η εξίσωση $4^{\text{συν}2x}+4^{\text{συν}^2x}=3,\ x\in[0,\pi]$ ή

(2) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\log_2\dfrac{x-2}{x(x-1)}-\log_{\sqrt{2}}2\cdot\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\right]$.

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

(ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\log_2\dfrac{(x-2)(x-1)}{x}$

(iii) Να λύσετε ως προς $\lambda\in R$ την εξίσωση: $2\lambda\cdot f(4)=\log(23\lambda)+2+(2-\lambda)\cdot\log 22$.

Προφανώς απαξιώνουμε να ασχοληθούμε με εφαρμογές.

Ας σημειωθεί ότι στα συγκεκριμένα κεφάλαια της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης έχουμε πλήθος εφαρμογών (νόμος της εκθετικής μεταβολής, κλίμακα Richter, pH διαλύματος, φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις , κ.λ.π.)

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να ασχοληθούμε με τέτοιες εφαρμογές.

Στο Σχολικό βιβλίο της Γ Λυκείου έχουμε την εξής εφαρμογή :

Πρόταση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Ισχύει η ισοδυναμία : $f'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ f(x)=c\cdot e^x,\ x\in\mathbb{R}$

Απόδειξη

Επειδή $e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, η $f'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ f(x)\cdot e^x=f(x)\cdot e^x\ \Leftrightarrow\ \dfrac{f'(x)\cdot -f(x)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=0$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \frac{f(x)}{e^x}=c,\ c\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ f(x)=c\cdot e^x,\ c\in\mathbb{R},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Η πρόταση αυτή επεκτείνεται ως εξής :

Πρόταση 2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Ισχύει η ισοδυναμία : $f'(x)=k\cdot f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ f(x)=c\cdot e^{kx},\ x\in\mathbb{R}$

Απόδειξη

Επειδή $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{Z}$, η $f'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)\cdot e^x = f(x)\cdot e^x \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\cdot - f(x)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)' = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^x} = c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = c\cdot e^x,\ c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Σχολιασμός της σχέσης $f'(t) = k\cdot f(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f είναι ανάλογος της τιμής της f. Αρκετά φυσικά φαινόμενα που εξελίσσονται στο χρόνο πληρούν την παραπάνω βασική ιδιότητα, όπως : διάσπαση ραδιενεργών ισοτόπων, γεννήσεις, θάνατοι, ουρές, η εξάπλωση επιδημιών, η εξάτμιση υγρών, χρονολόγηση αντικειμένων, φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις, κ.λ.π.

Με βάση την πρόταση 2, θα έχουμε $f(t) = c\cdot e^{kt},\ t \in \mathbb{R}$.

Για αυτόν ακριβώς το λόγο (επειδή δηλαδή ερμηνεύει αρκετά φυσικά φαινόμενα) ο αριθμός e λέγεται φυσικός αριθμός.

Εφαρμογή των παραπάνω σε φυσικά φαινόμενα.

Έστω ότι έχουμε ένα φυσικό μέγεθος $Q = Q(t)$, το οποίο ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $Q'(t) = k\cdot Q(t)$ (η $\dfrac{dQ}{dt} = k\cdot Q$ με το συμβολισμό του Leibniz). Με βάση τα παραπάνω, η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $Q(t) = c\cdot e^{k\cdot t}$ (1).

Έστω ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 0 η τιμή του Q είναι Q_0. Για t = 0 η (1) γίνεται $Q(0) = c\cdot e^{k\cdot 0}$, δηλ. $c = Q_0$. Έτσι η (1) γίνεται $Q(t) = Q_0\cdot e^{k\cdot t}$ (2)

Η συνάρτηση (2) εκφράζει το νόμο της **εκθετικής μεταβολής**.

Αν $k > 0$, τότε έχουμε εκθετική αύξηση. Αν $k < 0$, τότε έχουμε εκθετική απόσβεση.

Εφαρμογή της εκθετικής μεταβολής όταν έχουμε γεννήσεις και θανάτους

Ένας πληθυσμός παθογόνων μικροοργανισμών αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο προς την ποσότητα του. Αρχικά ο πληθυσμός τους ήταν 3000000 και 5 ημέρες αργότερα ήταν 4500000.

(α). Ποιος ήταν ο πληθυσμός 2 ημέρες από τη στιγμή που αρχίσαμε να μελετούμε το φαινόμενο ;

(β). Ποιος θα είναι ο πληθυσμός 10 ημέρες από τη στιγμή που αρχίσαμε να μελετούμε το φαινόμενο ;

(γ). Μετά το τέλος της $10^{ης}$ ημέρας αρχίσαμε να χορηγούμε σε καθημερινή βάση ισχυρό αντιβιοτικό, με αποτέλεσμα στο τέλος της $11^{ης}$ ημέρας ο πληθυσμός των μικροοργανισμών να μειωθεί κατά 20 %. Σε πόσες ημέρες ο πληθυσμός των των μικροοργανισμών θα μειωθεί κατά 90 % ;

Λύση

Αφού η αύξηση είναι ανάλογη προς την ποσότητα των μικροοργανισμών, ο πληθυσμός τους δίνεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0\cdot e^{k\cdot t} \Leftrightarrow Q(t) = 3000000\cdot e^{k\cdot t}$ (1).

Η (1) για $t=5$ δίνει $Q(5)=3000000\cdot e^{k\cdot 5} \Leftrightarrow 4500000=3000000\cdot e^{k\cdot 5} \Leftrightarrow e^{k\cdot 5}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5k=\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow k=\frac{1}{5}\cdot\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow k=\cdot\left(\ln\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$. Επομένως $e^{k\cdot t}=\left(\ln\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$ και έτσι η (1) γίνεται $Q(t)=3000000\cdot\left(\ln\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$ (2).

(α). Η (2) για $t=2$ γίνεται $Q(2)=3000000\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow Q(2)=3253415$ μικροοργανισμοί.

(β). Η (2) για $t=10$ γίνεται $Q(10)=3000000\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{10}{5}} \Leftrightarrow Q(10)=6750000$ μικρ / σμοί.

(γ). Με τη χορήγηση αντιβιοτικού έχουμε νέα εκθετική συνάρτηση $P(t)=P_0\cdot e^{\lambda\cdot t} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P(t)=6750000\cdot e^{\lambda\cdot t}$ (3). Για t = 1 έχουμε $P(1)=0,8\cdot 6750000$. Όμως η προηγούμενη σχέση για t = 1 δίνει $\Leftrightarrow P(1)=6750000\cdot e^{\lambda\cdot 1} \Leftrightarrow 0,8\cdot 6750000=6750000\cdot e^{\lambda} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0,8=e^{\lambda} \Leftrightarrow \lambda=\ln 0,8$. Έτσι η (3) γίνεται $\Leftrightarrow P(t)=6750000\cdot e^{\ln 0,8\cdot t}$ $\Leftrightarrow P(t)=6750000\cdot 0,8^{t}$ (4).
Ζητούμε την τιμή του t για την οποία $P(t)=0,1\cdot 6750000$. Έτσι η (4) γίνεται :
ημέρες.
Επομένως σε 10 ημέρες οι μικροοργανισμοί θα έχουν μειωθεί κατά 90 %.

Ημιζωή ραδιενεργών ισοτόπων.
Έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι όταν τα ραδιενεργά ισότοπα διασπώνται, τότε ο ρυθμός διάσπασής του είναι ανάλογος προς την ποσότητα του ραδιενεργού υλικού. Το βασικό μέγεθος που χαρακτηρίζει ένα ραδιενεργό υλικό είναι η **ημιζωή** του, δηλ. ο χρόνος που απαιτείται για να διασπαστεί η μισή ποσότητα του ραδιενεργού υλικού. Ο χρόνος ημιζωής είναι σταθερός , δηλ. ανεξάρτητος από την αρχική ποσότητα του υλικού. Πραγματικά. Αν $Q(t)$ είναι η ποσότητα του υλικού κατά τη χρονική στιγμή t, τότε, με βάση τα παραπάνω, είναι $Q'(t)=k\cdot Q(t)$, Έστω η αρχική ποσότητα. Τότε $Q(t)=Q_0\cdot e^{k\cdot t}$ (1), όπως αποδείξαμε πιο πάνω. Αν $Q_1=\frac{Q_0}{2}$ είναι η ποσότητα που αντιστοιχεί στον χρόνο ημιζωής $t_{ημιζ}$, τότε η (1) γίνεται

$Q(t_{ημιζ})=Q_0\cdot e^{k\cdot t_{ημιζ}} \Leftrightarrow \frac{Q_0}{2}=Q_0\cdot e^{k\cdot t_{ημιζ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=e^{k\cdot t_{ημιζ}} \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2}=k\cdot t_{ημιζ} \Leftrightarrow -\ln 2=k\cdot t_{ημιζ}$

$\Leftrightarrow t_{ημιζ}=-\frac{\ln 2}{k}$, δηλ. ο χρόνος ημιζωής είναι ανεξάρτητος της αρχικής ποσότητας, αφού εξαρτάται μόνο από το k.

Άσκηση.
Μία ποσότητα Q_0 ραδιενργού υλικού αποθηκεύεται το έτος 2000. Η ποσότητα αυτή έχει την τάση να μειώνεται (αναλόγως) με την πάροδο του χρόνου. Το βάρος αυτής της ποσότητας

δίνεται σαν συνάρτηση του χρόνου t από τον τύπο $Q(t)=Q_0\cdot 2^{ct}$ (1), όπου το t μετριέται σε έτη.

(α). Αν το έτος 2002 η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι το μισό της αρχικής, να βρεθεί η σταθερά *c*.

(β) Αν το έτος 2008 η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι 1 μονάδα, να βρεθεί η αρχική ποσότητα που αποθηκεύτηκε το έτος 2000.

(γ). Να γραφεί ο τύπος της συνάρτησης στη μορφή $Q(t)=16$.

(δ). Αν η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού πέσει κάτω από $\frac{1}{128}$ μονάδες, τότε η ποσότητα θα παύσει να είναι επιβλαβής για τον άνθρωπο και το περιβάλλον. Ποιό έτος θα συμβεί αυτό;

Λύση

(α) Στο 2002 είναι t = 2 Άρα η (1) γίνεται :

$$Q(2)=Q_0\cdot 2^{c\cdot 2} \Leftrightarrow \frac{Q_o}{2}=Q_0\cdot 2^{c\cdot 2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=2^{c\cdot 2} \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2}=\ln 2^{c\cdot 2} \Leftrightarrow -\ln 2=c\cdot 2\cdot \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1=c\cdot 2 \Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}.$$

Επομένως $Q(t)=Q_0\cdot 2^{c\cdot t} \Leftrightarrow Q(t)=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{2}}$ (2)

(β). Στο 2008 είναι t = 8 Άρα η (2) γίνεται :

$$Q(8)=Q_0\cdot 2^{-\frac{8}{2}} \Leftrightarrow 1=Q_0\cdot 2^{-4} \Leftrightarrow 1=\frac{Q_0}{16} \Leftrightarrow Q_0=16 \text{ μονάδες.}$$

(γ). Έτσι η (2) γίνεται $Q(t)=16\cdot 2^{-\frac{t}{2}}$.

(δ). Ζητούμε το χρόνο t για τον οποίο θα έχουμε :

$$Q(t)=\frac{1}{128} \Leftrightarrow \frac{1}{128}=16\cdot 2^{-\frac{t}{2}} \Leftrightarrow 2^{-7}=2^4\cdot 2^{-\frac{t}{2}} \Leftrightarrow 2^{-7}=2^{4-\frac{t}{2}} \Leftrightarrow -7=4-\frac{t}{2}$$

$\Leftrightarrow$ t=22 χρόνια.

Επομένως μετά το 2022 η ουσία θα είναι αβλαβής για τον άνθρωπο.

Άσκηση

Μια ραδιενεργή ουσία έχει ημιζωή 20 min. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να διασπαστεί το 90 % της αρχικής της ποσότητας ;

Λύση

Με βάση τον τύπο $t_{ημιζ}=-\frac{\ln2}{k}$ έχουμε $20=-\frac{\ln2}{k} \Leftrightarrow k=-\frac{\ln2}{20}$.

Επομένως η σχέση $Q(t)=Q_0\cdot e^{k\cdot t}$ γίνεται :

$$Q(t)=Q_0\cdot e^{-\frac{\ln2}{20}\cdot t} \Leftrightarrow Q(t)=Q_0\cdot\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{20}} \Leftrightarrow Q(t)=Q_0\cdot\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{20}} \Leftrightarrow Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \quad (1)$$

Ζητούμε το χρόνο t για τον οποίο έχουμε :

$$Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Leftrightarrow \frac{10}{100}Q(0)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Leftrightarrow \frac{1}{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Leftrightarrow \ln\frac{1}{10}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$\Leftrightarrow -\ln 10=-\frac{t}{20}\ln 2 \Leftrightarrow -\ln 10=-\frac{t}{20}\ln 2 \Leftrightarrow t=20\cdot\frac{\ln 10}{\ln 2} \Leftrightarrow t=66,4 \text{ min.}$$

Χρονολόγηση με άνθρακα ^{14}C (από το Wikipedia).
Η χρονολόγηση με άνθρακα ^{14}C βασίζεται στο γεγονός ότι με το θάνατο ενός οργανισμού ή το κόψιμο ενός δένδρου, ο ραδιενεργός άνθρακας ^{14}C παύει να αναπληρώνεται με τη λήψη της τροφής. Έτσι, αντί να βρίσκεται σε σταθερή αναλογία μέσα στο υλικό ή τον οργανισμό, όπως και στο περιβάλλον, αρχίζει να ελαττώνεται, διασπώμενος με την εκπομπή βήτα σωματιδίων. Η συγκέντρωση του ^{14}C στο δείγμα μπορεί να μετρηθεί. Η μέτρηση τής σημερινής συγκέντρωσης ατόμων ^{14}C είναι μέτρο τής ηλικίας τού δείγματος από τη στιγμή τού θανάτου, ή από τη στιγμή που σταματά η πρόσληψη διοξειδίου του άνθρακα μέσω της τροφής, φωτοσύνθεσης και αναπνοής.
Για να προσδιοριστεί η ηλικία ενός ευρήματος χρησιμοποιείται η εξής τεχνική ΄
Είναι γνωστό ότι μετά το θάνατο του οργανισμού ο ^{14}C δεν αντικαθίσταται και διασπάται με χρόνο ημιζωής 5750 χρόνια. Επομένως, η ποσότητα Q(t) του ^{14}C σε ένα νεκρό οργανισμό ικανοποιεί την εξίσωση $Q'(t)=k\cdot Q(t)$ για κατάλληλη αρνητική τιμή του k. Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη βάση για την εκτίμηση της ηλικίας του ευρήματος.

Άσκηση.
Να βρεθεί η ηλικία ενός ευρήματος (δείγματος) το οποίο έχει το 60% της ποσότητας του ραδιενεργού άνθρακα που είχε όταν ζούσε.
Λύση
Αφού ο χρόνος ημιζωής είναι 5750 χρόνια, εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε: $Q(t)=Q_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{5750}\cdot t}=Q_0\cdot\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{5750}}=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{5750}}$

Αναζητούμε το t ώστε $Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{5750}}=0,6\cdot Q_0 \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{5750}}=0,6 \Leftrightarrow t=-\frac{\ln 0,6}{\ln 2}\cdot 5750=4238$ που σημαίνει ότι το εύρημα είναι ηλικίας 4238 ετών.

ΣΕΙΣΜΟΙ - ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΕΙΣΜΟΥ

Πληροφορίες για τους σεισμούς.

Ρήγματα
Το ρήγμα αποτελεί μία διάρρηξη (σπάσιμο) στο φλοιό της Γης, κατά μήκος της οποίας μπορεί να αναγνωρισθεί κίνηση των εκατέρωθεν τεμαχών. Υπάρχουν τρία είδη ρηγμάτων: (1) **κανονικά ρήγματα**, (2) **ανάστροφα ρήγματα** και (3) **ρήγματα οριζόντιας μετατόπισης**. Στα κανονικά και στα ανάστροφα ρήγματα, η διάρρηξη του πετρώματος κλίνει προς τα κάτω, και το πέτρωμα μετακινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά μήκος της διάρρηξης. Στο κανονικό ρήγμα, το τέμαχος της ανώτερης πλευράς της διάρρηξης ολισθαίνει προς τα κάτω. Στο ανάστροφο ρήγμα, το πέτρωμα και στις δύο πλευρές του ρήγματος συμπιέζεται ισχυρά. Οι συμπιεστικές δυνάμεις ωθούν το πάνω τέμαχος να ολισθήσει προς τα πάνω και το κατώτερο τέμαχος ωθείται προς τα κάτω. Στο οριζόντιας μετατόπισης ρήγμα, η διάρρηξη εκτείνεται κατακόρυφα μέσα στο

πέτρωμα και τα τεμάχη των πετρωμάτων κατά μήκος του ρήγματος ολισθαίνουν το ένα ως προς το άλλο οριζόντια.

Ενεργά ρήγματα
Υπάρχουν πολλοί ορισμοί για τα ενεργά ρήγματα. Ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος ορισμός είναι: ενεργό ρήγμα είναι εκείνο το οποίο έχει προκαλέσει τουλάχιστον ένα σεισμό κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δέκα χιλιάδων χρόνων (**Ολόκαινο**). Η ιστορική και η παλαιοσεισμολογική έρευνα βοηθούν στο χρονικό καθορισμό του τελευταίου μεγάλου σεισμού σε ένα ρήγμα.

Μέγεθος
Το μέγεθος του σεισμού φανερώνει το πόσο μεγάλος είναι ένας σεισμός, υπολογισμένο με βάση την κλίμακα Richter, η οποία ξεκινά από το 0, με μεγαλύτερο καταγεγραμμένο μέγεθος σεισμού 8,6. Σεισμοί πάνω από αυτό το μέγεθος δεν είναι πιθανό να γίνουν, επειδή η απελευθέρωση της τοπικά συσσωρευμένης ενέργειας θα ήταν τόσο μεγάλη, ώστε να προκαλέσει πλαστική αντί για ελαστική παραμόρφωση των περιβαλλόντων πετρωμάτων. Η κλίμακα Richter είναι λογαριθμική, που σημαίνει ότι ένας σεισμός με μέγεθος 5 είναι 10 φορές περισσότερο καταστροφικός από ότι ένας σεισμός με μέγεθος 4.

Ένταση
Ένταση είναι η έκταση των καταστροφών που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού, και μετριέται με βάση την τροποποιημένη κλίμακα Mercalli, η οποία κυμαίνεται από το 0 έως το 12. Η ένταση ενός σεισμού σε μία συγκεκριμένη θέση αποτελεί μία μέτρηση της βίαιης κίνησης του εδάφους που δημιουργείται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού. Η ένταση καθορίζεται από τις επιπτώσεις της δόνησης στους ανθρώπους, στα κτίρια, στις γεωλογικές δομές κ.α. Αντίθετα με το μέγεθος του σεισμού το οποίο έχει μία μοναδική τιμή για ένα συγκεκριμένο σεισμό, η ένταση του σεισμού σε μία θέση εξαρτάται από την απόσταση αυτής της θέσης από το επίκεντρο του σεισμού, το βάθος της εστίας, τις παρεμβαλλόμενες τοπικές δομές και το είδος της κίνησης που προκαλείται από τη δραστηριοποίηση του ρήγματος κατά τη διάρκεια ενός σεισμού.

Εστία
Η πηγή ενός σεισμού κατανέμεται γύρω από ένα σημείο από το οποίο τα σεισμικά κύματα φαίνεται να ξεκινούν το "ταξίδι τους". Αυτό το σημείο ονομάζεται "**εστία**" και συνήθως αποτελεί το σημείο από το οποίο ξεκίνησε η διάρρηξη στο ρήγμα. Η θέση της εστίας είναι γνωστή και ως "**υπόκεντρο**" και η προβολή της εστίας στην επιφάνεια της Γης αποτελεί το "**επίκεντρο**" του σεισμού.

Η κλίμακα Richter.
Σύμφωνα με την κλίμακα Richter το μέγεθος R ενός σεισμού εντάσεως I δίνεται από τον τύπο
$R = \log\frac{I}{I_0}$. όπου I_0 μια ορισμένη ελάχιστη ένταση.

(α). Να βρεθεί το μέγεθος R ενός σεισμού που έχει ένταση $I = 1000 \cdot I_0$.

(β). Να εκφρασθεί το I ως συνάρτηση του R και του I_0.

(γ). Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ενός σεισμού από την ένταση ενός άλλου σεισμού που είναι μικρότερος κατά 1 μονάδα Richter.

Λύση

(α). Επειδή $I = 1000 \cdot I_0$, από τον τύπο $R = \log\frac{I}{I_0}$ έχουμε ότι $R = \log\frac{1000 \cdot I_0}{I_0} = \log 1000 = 3$.

(β). Είναι $R = \log\frac{I}{I_0} \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = 10^R \Leftrightarrow I = I_0 \cdot 10^R$

(γ). Θεωρούμε δυο σεισμούς I και I΄ με μεγέθη R και R΄ αντίστοιχα, όπου $R' = R + 1$.Τότε έχουμε $\frac{I'}{I} = \frac{I_0 \cdot 10^{R'}}{I_0 \cdot 10^R} = \frac{10^{R'}}{10^R} = \frac{10^{R+1}}{10^R} = 10 \Leftrightarrow I' = 10 \cdot I$

Παρατήρηση : Παρατηρούμε ότι αύξηση ενός σεισμού κατά 1 Richter σημαίνει ότι ο σεισμός είναι 10 φορές ισχυρότερος.

pH διαλύματος

Οι χημικοί χρησιμοποιούν έναν αριθμό που συμβολίζεται με pH για να περιγράψουν την οξύτητα ενός διαλύματος. Εξ ορισμού είναι pH = − log[H^+], όπου [H^+] είναι η συγκέντρωση των H^+ σε γραμμοϊόντα ανά λίτρο.

Άσκηση.

(α). Να υπολογίσετε το pH των εξής ουσιών:

(i) του ξιδιού : $\left[H^+\right] = 6,3 \cdot 10^{-3}$

(ii) του νερού της θάλασσας : $\left[H^+\right] = 5,0 \cdot 10^{-9}$

(β) Να υπολογίσετε τη συγκέντρωση γραμμοϊόντων υδρογόνου [H^+] στις εξής ουσίες:

(i) Μπύρα: pH = 4 2,

(ii) Γάλα: pH = 6 6.

Λύση

(α). (i) Το pH του ξιδιού είναι ίσο με $-\log\left(6,3 \cdot 10^{-3}\right) = -\log 6,3 + 3 = -0,8 + 3 = 2,2$

(ii) Το pH του νερού της θάλασσας είναι ίσο με $-\log\left(5,0 \cdot 10^{-9}\right) = 8,3$

(β). (i) Για τη μπύρα έχουμε : pH = 4,2= $\Leftrightarrow 4,2 = -\log\left[H^+\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left[H^+\right] = -4,2 \Leftrightarrow \left[H^+\right] = 10^{-4,2} \Leftrightarrow \left[H^+\right] = 6,3 \cdot 10^{-5}$.

(ii) Για το γάλα έχουμε : pH = 6,6= $\Leftrightarrow 6,6 = -\log\left[H^+\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left[H^+\right] = -6,6 \Leftrightarrow \left[H^+\right] = 10^{-6,6} \Leftrightarrow \left[H^+\right] = 2,5 \cdot 10^{-5}$.

Άσκηση.

Ένα διάλυμα θεωρείται όξινο αν $\left[H^+\right] > 10^{-7}$ και βασικό αν $\left[H^+\right] < 10^{-7}$. Να βρεθούν οι αντίστοιχες ανισότητες για το pH.

Λύση

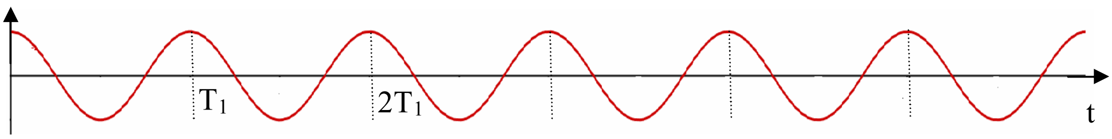
Είναι $\left[H^+\right] > 10^{-7} \Leftrightarrow \log\left[H^+\right] > \log 10^{-7} \Leftrightarrow \log\left[H^+\right] > -7 \Leftrightarrow -\log\left[H^+\right] < 7 \Leftrightarrow pH < 7$.

Άρα ένα διάλυμα είναι όξινο αν έχει pH < 7, ενώ είναι βασικό αν έχει pH > 7.

Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

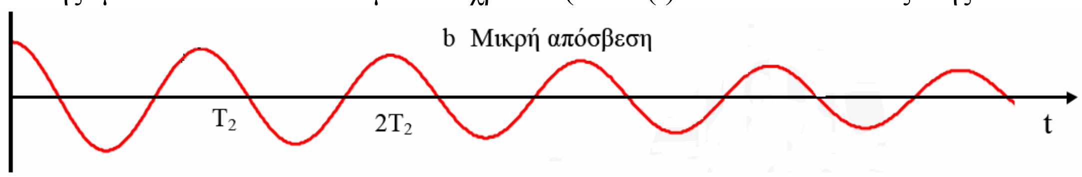
Οι ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος μειώνεται με το χρόνο και τελικά μηδενίζονται λέγονται φθίνουσες ταλαντώσεις. Η μείωση του πλάτους (απόσβεση) οφείλεται σε δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση. Μέσω του έργου αυτών των δυνάμεων μεταφέρεται ενέργεια από σύστημα προς το περιβάλλον, οπότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος μειώνεται. Με τον τρόπο αυτόν ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης.

Υπάρχουν διαφόρων ειδών φθίνουσες ταλαντώσεις. Θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία η αντιτιθέμενη στην κίνηση του σώματος δύναμη έχει τη μορφή $\vec{F}_{αντ} = -b \cdot \vec{υ}$. Μια τέτοια δύναμη μπορεί να θεωρηθεί η αντίσταση του αέρα. Η σταθερά b είναι θετική και λέγεται σταθερά απόσβεσης. Εξαρτάται από το ιξώδες του μέσου και από το σχήμα και το μέγεθος του σώματος που κινείται.



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε μια ιδανική ταλάντωση στην οποία η σταθερά απόσβεσης είναι 0. Το πλάτος της ταλάντωσης και η περίοδος μένουν σταθερά.

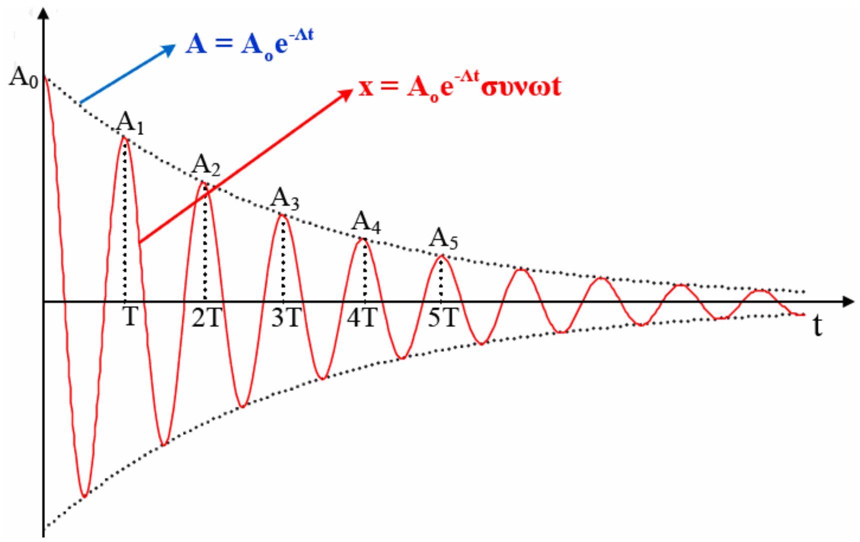
Στο παρακάτω σχήμα η σταθερά απόσβεσης είναι μικρή και το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο (αν A(t) είναι το πλάτος της ταλάντωσης



συναρτήσει του χρόνου, τότε $A(t) = A_0 \cdot e^{-Λt}$, όπου A_0 το αρχικό πλάτος).

Η σταθερά Λ εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και από τη μάζα του ταλαντούμενου συστήματος.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της A(t).



Χρόνος ημίσειας ζωής του πλάτους

Χρόνος ημίσειας ζωής του πλάτους ονομάζεται η χρονική διάρκεια που απαιτείται για να ελαττωθεί το πλάτος στο μισό. Ο χρόνος ημίσειας ζωής υπολογίζεται κατά τα γνωστά από τη σχέση $t = \dfrac{\ln 2}{\Lambda}$

Άσκηση.

Το πηλίκο δυο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση παραμένει σταθερό, δηλ. $\dfrac{A_0}{A_1} = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_2}{A_3} = \cdots = \dfrac{A_{\nu-1}}{A_\nu} =$σταθ. $= e^{\Lambda t}$, όπου A_0 το αρχικό πλάτος, A_1 το πλάτος στο τέλος της $1^{ης}$ περιόδου, A_2 το πλάτος στο τέλος της $2^{ης}$ περιόδου κ.λ.π. και Τ η περίοδο της φθίνουσας ταλάντωσης.

Λύση

Για κ = 2, 3, …, ν έχουμε $\dfrac{A_{\kappa-1}}{A_{\kappa-1}} = \dfrac{A_0 \cdot e^{-(\kappa-1)\cdot\Lambda\cdot t}}{A_0 \cdot e^{-\kappa\cdot\Lambda\cdot t}} = e^{\Lambda\cdot t} =$ σταθ

Άσκηση.

Ένα μηχανικό σύστημα εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A(t) = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ με Λ θετικό αριθμό. Μετά από 20 πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος του γίνεται $\dfrac{A_0}{5}$. Να βρείτε μετά από πόσες ταλαντώσεις το πλάτος του θα γίνει $\dfrac{A_0}{25}$.

Λύση

Τη χρονική στιγμή t = 20T, όπου Τ η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης, το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_1 = \dfrac{A_0}{5}$ Τη χρονική στιγμή t = νT, όπου ν ο ζητούμενος θετικός ακέραιος αριθμός των ταλαντώσεων, το πλάτος έχει γίνει $A_2 = \dfrac{A_0}{125}$.

Είναι $A_1 = A_0 e^{-\Lambda\cdot 20\cdot T} \Leftrightarrow \dfrac{A_0}{5} = A_0 e^{-\Lambda\cdot 20\cdot T} \Leftrightarrow e^{-\Lambda\cdot 20\cdot T} = \dfrac{1}{5}$ (1).

Επίσης $A_2 = A_0 e^{-\Lambda\cdot\nu\cdot T} \Leftrightarrow \dfrac{A_0}{125} = A_0 e^{-\Lambda\cdot\nu\cdot T} \Leftrightarrow e^{-\Lambda\cdot\nu\cdot T} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\Lambda\cdot\nu\cdot T} = \left(e^{-\Lambda\cdot 20\cdot T}\right)^3 \Leftrightarrow e^{-\Lambda\cdot\nu\cdot T} = e^{-\Lambda\cdot 60\cdot T} \Leftrightarrow \nu = 60$ ταλαντώσεις.

Βιβλιογραφία - Πηγές.

[1]. Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Β Λυκείου
[2]. Εκθετική αύξηση και απόσβεση, του Ανδρέα Ν. Σβέρκου, Μαθηματικού, Σχολικού Σύμβουλου
[3]. Wikipedia
[4]. Young D. Hugh : Πανεπιστημιακή Φυσική