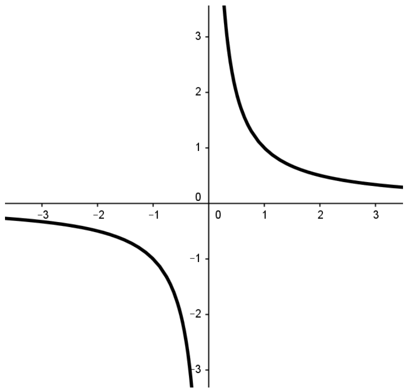
Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

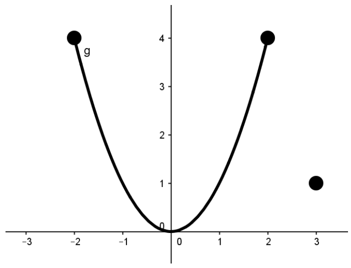
Σάμος, Σεπτέμβριος του 2016

Η συνέχεια στα σημεία συσσώρευσης και στα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης.

Γενική παρατήρηση.
Η ιδέα της συνέχειας είναι «η διατήρηση της συνέχειας» της «γραμμής» της γραφικής παράστασης. Θέλουμε δηλ. η γραφική παράσταση της συνάρτησης να μην παρουσιάζει διακοπές.
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Εδώ «φαίνεται» να υπάρχει ασυνέχεια στο 0, όμως συμφωνήσαμε να μην εξετάζουμε τη συνέχεια σε σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Επομένως δεν τίθεται θέμα συνέχειας στο 0.



Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος : $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ αν } x\in[-2,2] \\ 1 \text{ , αν } x=3 \end{cases}$. Το 3 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού. Θα δεχτούμε ότι η f είναι ή όχι συνεχής στο 3 ;
Αν η απάντηση είναι ΝΑΙ, τότε πρέπει να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς και να αποδείξουμε τα παρακάτω θεωρήματα.



Ορισμοί περιοχών σημείων.
Ορίζουμε $I_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ (περιοχή του x_0 με ακτίνα $\delta>0$) Επίσης ορίζουμε $I^*_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ (περιοχή του x_0 με ακτίνα $\delta>0$ χωρίς το x_0).
Είναι προφανές ότι $x\in I_\delta(x_0) \Leftrightarrow |x-x_0|<\delta$ και $x\in I^*_\delta(x_0) \Leftrightarrow 0<|x-x_0|<\delta$

Ορισμός σημείου συσσώρευσης συνόλου Α.
Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Το x_0 λέγεται σημείο συσσώρευσης του Α όταν :
$(\forall\,\delta>0)\left[I^*_\delta(x_0)\cap A\neq\varnothing\right]$.
Παρατήρηση. Το x_0 μπορεί και να μην ανήκει στο Α.

Μεμονωμένο σημείου του συνόλου Α.
Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και $x_0\in A$. Το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του Α όταν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του Α, δηλ. $(\exists\,\delta>0)\left[I^*_\delta(x_0)\cap A\neq\varnothing\right]$.

Ορισμός 1.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Η f λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$ όταν : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in A)\ \left[\, |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right]$

Παρατηρήσεις.

(1). Στον ορισμό του ορίου :
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ όταν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in A)\ \left[0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon\right]$ το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού, ενώ στον ορισμό της συνέχειας το x_0 πρέπει να είναι σημείο του πεδίου ορισμού, χωρίς να είναι απαραίτητα σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού.

(2). Στον ορισμό του ορίου έχουμε : $0 < |x - x_0| < \delta$, δηλ.δεν επιτρέπουμε στο x να πάρει την τιμή x_0, ενώ στον ορισμό της συνέχειας το x επιτρέπεται να πάρει και την τιμή x_0.

(3). Στον ορισμό του ορίου είναι δυνατόν το x_0 να μη βρίσκεται στο πεδίο ορισμού (αρκεί να είναι σημείο συσσώρευσης), ενώ στον ορισμό της συνέχειας είναι υποχρεωτικό το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Ορισμός 2.
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται συνεχής όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της A.

Ορισμός 3.
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Η f λέγεται συνεχής στο B όταν είναι η $f \,/\, A$ είναι συνεχής.

Θεώρημα 1. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Απόδειξη

(I). Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο. $x_0 \in A$. Τότε :
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in A)\ \left[\, |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right]$.
Τότε βεβαίως είναι προφανές ότι ισχύει και
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in A)\ \left[\, 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right]$, δηλ.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(II). Ας υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Τότε :
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in A)\ \left[\, 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right]$
Για $x = x_0$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Επομένως :
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in A)\ \left[\, |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right]$.
Άρα η f είναι συνεχής στο. $x_0 \in A$.

Θεώρημα 2. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού Α. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη

Επειδή το x_0 είναι μεονωμένο. σημείο του π. ορισμού Α, τότε $\left(\exists\ \delta > 0\right)\left[N_\delta^*(x_0) \cap A \neq \varnothing\right]$.

Επομένως $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = \{x_0\}$.

Έστω τώρα ένα ε > 0. Τότε για το παραπάνω δ έχουμε :

Αν $|x - x_0| < \delta$, θα είναι $x = x_0$, οπότε $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Άρα η η f είναι συνεχής στο x_0.

Υπάρχει συμβατότητα μεταξύ της παραπάνω θεωρίας και της θεωρίας που υπάρχει στο Σχολικό βιβλίο ;

Στο Σχολικό Βιβλίο έχουμε τον εξής ορισμό :

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι στο x_0 , όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Όμως στο Σχολικό βιβλίο αναφέρεται ρητά στη σελίδα 133 ότι : «Στα επόμενα και σε όλη την έκταση του βιβλίου θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων».

Επομένως δεν έχουμε μεμονωμένα σημεία.

Επίσης όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού είναι σημεία συσσώρευσης.

Έτσι, με βάση το θεώρημα 1, ο ορισμός 1 που δίνεται πιο πάνω ταυτίζεται με τον ορισμό του Σχολικού βιβλίου.