Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

Χίος, καλοκαίρι του 2016

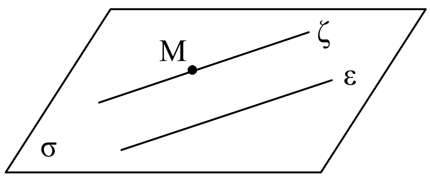
ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Από την Επιπεδομετρία είναι γνωστά τα εξής :

- **Ευκλείδειο αίτημα (αξίωμα)** : Από σημείο Μ εκτός ευθείας (ε) μόνο μια παράλληλη προς την (ε) μπορούμε να φέρουμε.
- **Πρόταση** : $\left.\begin{cases} \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_3$ (μεταβατική ιδιότητα)

Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν και στο χώρο, όμως αυτό δεν είναι προφανές. Επομένως οι δυο προτάσεις χρειάζονται απόδειξη.

Πρόταση. Έστω ε ευθεία και Μ σημείο του χώρου. Από το Μ μόνο μια ευθεία παράλληλη προς την ε άγεται στο χώρο.

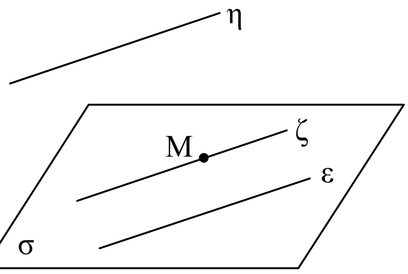


Απόδειξη

Η ευθεία ε και το σημείο Μ ορίζουν επίπεδο σ.
Στο σ υπάρχει μοναδική ευθεία ζ // ε.
Θα αποδείξουμε ότι η ζ είναι η μοναδική παράλληλη προς την ε.
Έστω ότι υπάρχει και άλλη παράλληλη από το Μ προς την ε, η ζ΄. Οι ζ΄, ε ορίζουν επίπεδο π. Τα π και σ έχουν κοινά το σημείο Μ και την ε. Άρα ταυτίζονται. Επομένως η ζ΄ είναι ευθεία του σ. Άρα στο σ έχουμε δυο παράλληλες από το Μ στην ε, τις Επομένως ζ, ζ΄ ταυτίζονται, δηλ. η ζ είναι η μοναδική παράλληλη προς την ε από το Μ.

Πρόταση. Θεωρούμε τις ευθείες ε, ζ, η του χώρου. Αν $\left.\begin{cases} \zeta // \eta \\ \varepsilon // \eta \end{cases}\right\}$, τότε είναι και ε // ζ.

Απόδειξη



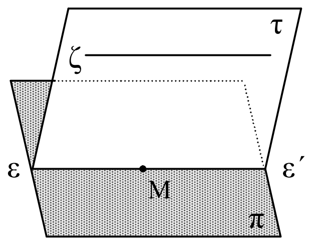
Καταρχήν οι ευθείες ε και ζ δεν έχουν κοινά σημεία. Αν είχαν κοινό σημείο, τότε θα είχαμε από αυτό το σημείο δυο παράλληλες προς την η, τις ζ, ε, άτοπο.
Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι ευθείες ε, ζ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ευθείας ζ. η ευθεία ε και το σημείο Μ ορίζουν ένα επίπεδο σ. Θα αποδείξουμε ότι η ζ βρίσκεται πάνω στο σ.
Έστω ότι η ζ δεν βρίσκεται πάνω στο σ. Τότε η ζ τέμνει το σ στο Μ.. Επειδή η // ζ, άρα και η η τέμνει το σ. Επειδή ε // η, άρα και η ε τέμνει το σ, άτοπο. Επομένως η ζ είναι ευθεία του σ. Επειδή δεν τέμνει την ε, άρα ζ // ε.

Στο Σχολικό υπάρχει το εξής θεώρημα :

Θεώρημα. Αν μία ευθεία ε′ είναι παράλληλη σε μία ευθεία ε ενός επιπέδου π και δεν ανήκει σε αυτό, τότε είναι παράλληλη στο π.

Θα έπρεπε όμως, για να υπάρχει πληρότητα, να υπάρχουν επιπλέον στη θεωρία και οι εξής τρεις προτάσεις :

Πρόταση. Αν μια ευθεία ζ είναι παράλληλη προς ένα επίπεδο π, τότε κάθε επίπεδο που διέρχεται από την ζ και τέμνει το επίπεδο π, θα το τέμνει κατά ευθεία παράλληλη προς την ζ.



Απόδειξη

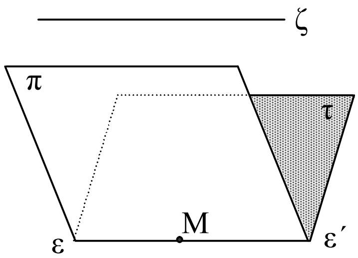
Έστω τ το επίπεδο που διέρχεται από τη ζ και τέμνει το π κατά την ευθεία ε. Τότε είναι ε // ζ, γιατί αν οι ε, ζ ήταν τεμνόμενες, τότε το κοινό τους σημείο θα ήταν και κοινό σημείο των ζ π, άτοπο αφού η ζ // π.

Πρόταση. Αν μια ευθεία ζ είναι παράλληλη προς ένα επίπεδο π, τότε η παράλληλη προς τη ζ που άγεται από τυχαίο σημείο Μ του π βρίσκεται ολόκληρη πάνω στο π.

Απόδειξη

Έστω ε η παράλληλη ευθεία που άγεται από το σημείο Μ προς την ευθεία ζ. Οι ε, ζ ορίζουν επίπεδο π που έχει κοινό σημείο το Μ με το επίπεδο τ. Τότε τα επίπεδα π, τ τέμνονται κατά ευθεία ε΄ που διέρχεται από το Μ. Επομένως στο επίπεδο τα έχουμε από το Μ δυο παράλληλες, τις ε, ε΄ προς τη ζ. Τότε, με βάση το Ευκλείδειο αίτημα, οι ε, ε΄ ταυτίζονται . Άρα η ε βρίσκεται ολόκληρη πάνω στο π.

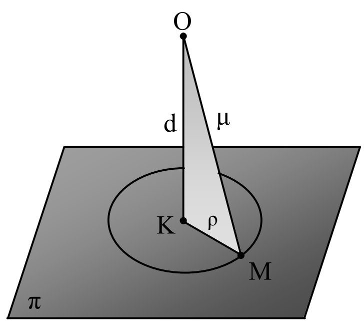
Πρόταση. Αν δυο τεμνόμενα επίπεδα είναι παράλληλα προς την ίδια ευθεία, τότε και η τομή τους είναι παράλληλη προς την ευθεία αυτή.



Απόδειξη

Θεωρούμε τα επίπεδα π, τ που είναι και τα δυο παράλληλα προς την ευθεία ζ και τέμνονται μεταξύ τους κατά την ευθεία ε.
Από το τυχαίο σημείο Μ της ε φέρνουμε ευθεία ε΄//ζ.
Επειδή ζ//π και το Μ είναι σημείο του π, άρα η ε΄ είναι ευθεία του π. Για τον ίδιο λόγο η ε΄ είναι και ευθεία του τ. Άρα η ε΄ είναι η τομή των π, τ. Όμως και η ε είναι τομή των π, τ. Άρα ε και ε΄ ταυτίζονται, οπότε ε//ζ.

Βασικός γεωμετρικός τόπος. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου π που απέχουν από σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση μ είναι ο κύκλος (Κ,ρ) του επιπέδου π, όπου d η απόσταση του Ο από το επίπεδο π και $\rho = \sqrt{\mu^2 - d^2}$



Απόδειξη

Έστω Κ η προβολή του Ο στο επίπεδο π με (ΟΚ) = d.
Ευθύ. Έστω Μ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου. Τότε (ΟΜ) = μ. Είναι $OK \perp \pi$, άρα $OK \perp KM$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΜ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα : $KM^2 = \mu^2 - \rho^2 \Leftrightarrow KM = \sqrt{\mu^2 - \rho^2}$, οπότε το Μ βρίσκεται πάνω στον κύκλο (Κ,ρ) του επιπέδου π, όπου $\rho = \sqrt{\mu^2 - d^2}$.

Αντίστροφο. Έστω Μ΄ σημείο του (Κ,ρ). Τότε $OM'^2 = d^2 + \rho^2 \Leftrightarrow OM'^2 = d^2 + (\mu^2 - d^2) = \mu^2$, οπότε $OM' = \mu$, δηλ. το Μ΄ είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου.

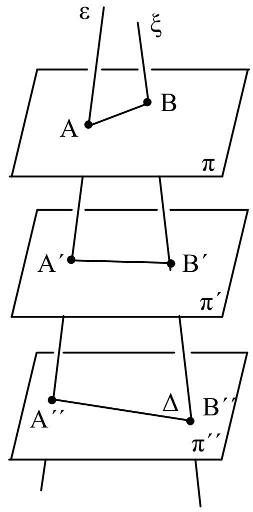
Διερεύνηση. Αν μ > d, τότε ο γ.τ. είναι ο κύκλος $\left(K, \sqrt{\mu^2 - d^2}\right)$

Αν μ = d, τότε ο γ.τ. είναι το σημείο Κ.

Αν μ < d, τότε ο γ.τ. είναι το κενό σύνολο.

Αντίστροφο θεώρημα του Θαλή

Αν Α, Α′, Α″ είναι σημεία ευθείας ε και Β, Β′, Β″ είναι σημεία ευθείας ξ, όπου οι ευθείες ε και ξ είναι ασύμβατες και ισχύει $\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'B''}$ (1), τότε οι ευθείες ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο (ή βρίσκονται σε τρία επίπεδα παράλληλα μεταξύ τους) (αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή).



Λύση

Οι ευθείες ΑΒ, Α΄Β΄ είναι ασύμβατες, γιατί : Αν ήταν συμβατές, τότε θα όριζαν το επίπεδο (ΑΒ,Α′Β′). Τα σημεία Α, Β, Α′, Β′ θα ανήκαν στο επίπεδο αυτό, οπότε και οι ΑΑ′, ΒΒ′ θα ανήκαν σε αυτό, δηλ. οι ε, ξ θα ήταν συνεπίπεδες, άτοπο.

Σύμφωνα με εφαρμογή του Σχολικού υπάρχουν μοναδικά επίπεδα π, π′ που περιλαμβάνουν τις ΑΒ, Α΄Β΄ αντίστοιχα και είναι παράλληλα. Επίσης από το Α″ φέρνουμε επίπεδο π΄΄ // π // π′, το οποίο υποθέτουμε ότι τέμνει την ΒΒ′ στο Δ.. Τότε , από το θεώρημα του Θαλή, ισχύει $\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'\Delta}$ (2).

Από τις (1), (2) έχουμε ότι $\frac{BB'}{B'B''} = \frac{BB'}{B'\Delta} \Leftrightarrow B'B'' = B'\Delta$, οπότε τα σημεία Β΄, Δ ταυτίζονται. Επομένως το Β″ είναι σημείο του π″.

Άρα οι ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ ανήκουν στα επίπεδα π, π′, π΄΄ αντίστοιχα, που είναι μεταξύ τους παράλληλα, οπότε οι ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο.