Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

Χίος, καλοκαίρι του 2016

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ασκήσεις παραγράφων 12.1. και 12.2.

1 / Σχολικού / σελ. 259.

Τι επιφάνεια παράγει μία ευθεία που ολισθαίνει :

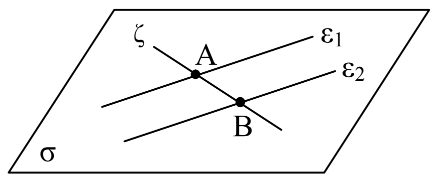
(Ι) σε δύο παράλληλες ευθείες και

(ΙΙ) σε δύο τεμνόμενες ευθείες, εκτός του κοινού τους σημείου;

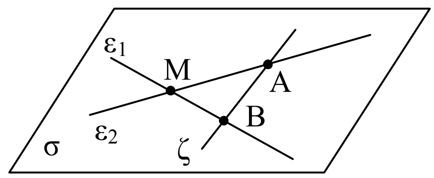
Γιατί εξαιρούμε το κοινό σημείο ;

Λύση

(Ι). Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ορίζουν ένα επίπεδο σ, πάνω στο οποίο βρίσκονται. Θεωρούμε την ευθεία ζ που τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Α, Β και ολισθαίνει πάνω σ΄ αυτές. Αφού τα Α, Β είναι σημεία των ε_1, ε_2, θα είναι και σημεία του επιπέδου σ. Αφου η ζ έχει δυο κοινά σημεία με το σ (τα Α, Β), άρα βρίσκεται ολόκληρη πάνω στο σ. Επομένως η ζ κινείται πάνω στο επίπεδο σ.



(ΙΙ). Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ορίζουν ένα επίπεδο σ., πάνω στο οποίο βρίσκονται. Θεωρούμε την ευθεία ζ που τέμνει τις ε_1, ε_2 στα Α, Β (που είναι διαφορετικά από το Μ) και ολισθαίνει πάνω σ΄ αυτές. Αφού τα Α, Β είναι σημεία των ε_1, ε_2, θα είναι και σημεία του επιπέδου σ. Αφου η ζ έχει δυο κοινά σημεία με το σ (τα Α, Β), άρα βρίσκεται ολόκληρη πάνω στο σ. Επομένως η ζ κινείται πάνω στο σ.



Παρατήρηση 1. Το κοινό σημείο εξαιρείται γιατί ενδέχεται τα Α, Β να ταυτίζονται με το Μ, οπότε η ζ δεν μπορεί να καθοριστεί από ένα μόνο σημείο.

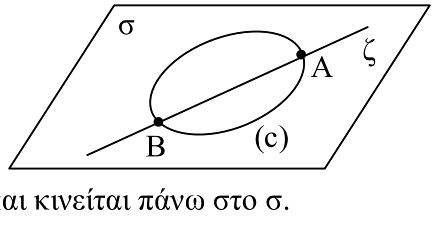
Παρατήρηση 2. Η έκφραση «τι επιφάνεια παράγει» που έχουμε στην εκφώηση δεν είαι καθόλου μαθηματική.

2 / Σχολικού / σελ. 259.

Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών που ορίζονται από δύο διαφορετικά σημεία ενός κύκλου;

Λύση

Έστω Α, Β δυο σημεία του κύκλου (c) (ο οποίος βρίσκεται πάνω στο επίπεδο σ) και η εθεία ζ που ορίζεται από τα Α, Β.

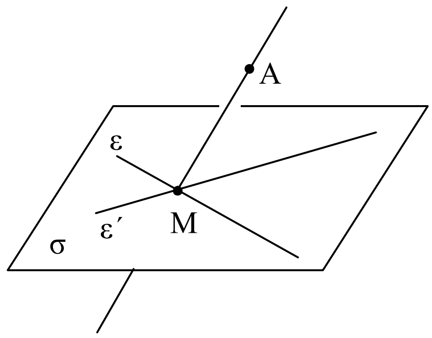


Επειδή τα Α, Β είναι σημεία του σ, άρα η ευθεία ζ βρίσκεται και κινείται πάνω στο σ.

Παρατήρηση 1. Δεν έχει νόημα η έκφραση «να βρεθει ο γ.τ.»

3 / Σχολικού / σελ. 259.
Δίνονται δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ε′ και σημείο Α εκτός αυτών. Πώς θα ελέγξουμε αν το σημείο Α είναι σημείο του επιπέδου (ε, ε′) ;

Λύση



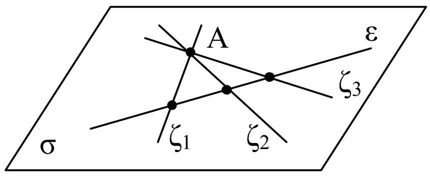
Έστω σ το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες ε, ε′ και Μ το κοινό σημείο των ε, ε′. Θεωρούμε την ευθεία ΑΜ. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(Ι). Αν η ευθεία ΑΜ είναι ευθεία του επιπέδου σ, τότε το Α ανήκει στο σ.

(ΙΙ). Αν η ευθεία ΑΜ δεν είναι ευθεία του επιπέδου σ, τότε το Α δεν ανήκει στο σ.

4 / Σχολικού / σελ. 259.
Τι επιφάνεια παράγει μία ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο Α και τέμνει ευθεία ε, που δεν περιέχει το σημείο Α.

Λύση



Το σημείο Α και η ευθεία (ε) ορίζουν το επίπεδο (σ). Οποιαδήποτε ευθεία ζ_1, ζ_2, ζ_3 … διέρχεται από το Α και τέμνει την (ε) στα Κ, Λ, Μ … έχει με το (σ) δυο κοινά σημεία (τα Α, Κ η ζ_1, τα Α, Λ η ζ_2, τα Α, Μ η ζ_3 …), οπότε βρίσκεται πάνω στο (σ). Άρα όλες αυτές οι ευθείες βρίσκονται πάνω στο (σ).
Παρατήρηση. Η έκφραση «τι επιφάνεια παράγει» που έχουμε στην εκφώνηση δεν είαι καθόλου μαθηματική.

5 / Σχολικού / σελ. 259.
Πόσα επίπεδα ορίζουν τρία σημεία που βρίσκονται στην ίδια ευθεία;

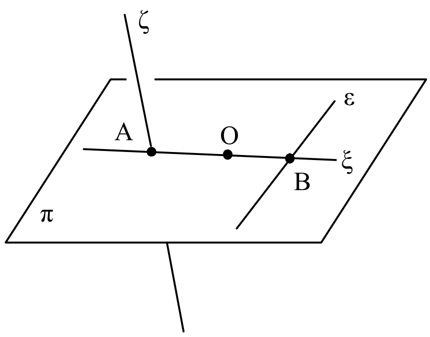
Λύση

Έστω Α, Β, Γ τα τρία συνευθειακά σημεία και (ε) η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται. Οποιοδήποτε επίπεδο περιέχει τα Α, Β, Γ θα περιέχει και την (ε). Άρα στην ουσία αναζητούμε τα επίπεδα που διέρχονται από την (ε). Αυτά είναι άπειρα.

Ασκήσεις παραγράφου 12.3.

1 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 262.
Να κατασκευάσετε ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο Ο και τέμνει δύο σταθερές ασύμβατες ευθείες

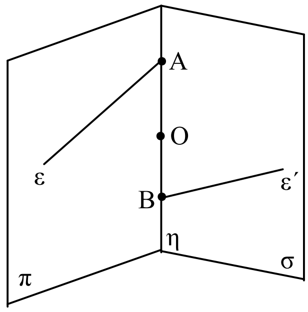
Λύση



α΄ τρόπος Έστω ε, ζ οι ασύμβατες σταθερές ευθείες και Ο το σταθερό σημείο.
Ανάλυση. Έστω ξ η ζητούμενη ευθεία, η οποία τέμνει τη ζ στο Α, την ε στο Β και διέρχεται από το Ο. Θεωρούμε το επίπεδο π = (Ο,ε), το οποίο περιλαμβάνει την ξ (αφού τα σημεία Ο, Β της ξ ανήκουν στο επίπεδο). Επίσης το Α είναι σημείο του π.

Σύνθεση. Η ε και το σημείο Ο καθορίζουν ένα επίπεδο π. Επειδή οι ε, ζ είναι ασύμβατες, άρα η ζ τέμνει το π σε ένα σημείο Α, διαφορετικό από το Ο (σε αντίθετη περίπτωση το Ο θα ταυτιζόταν με το Α, άτοπο).

Θεωρούμε την ευθεία ΑΟ του επιπέδου π, η οποία τέμνει την ε στο Β. Η ευθεία ΑΒ είναι η μοναδική ζητούμενη ευθεία.



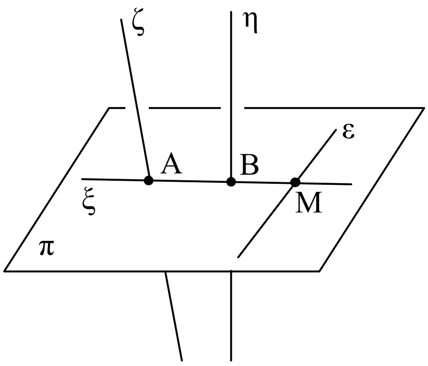
Διερεύνηση : Αν ΑΟ // ε, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

β΄ τρόπος Έστω π το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο Ο. Έστω σ το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε΄ και το σημείο Ο. Τα επίπεδα π και σ δεν ταυτίζονται (αν ταυτίζονταν, τότε οι ε, ε΄ θα ήταν συνεπίπεδες, άτοπο) και έχουν κοινό το σημείο Ο. Επομένως τα π, σ τέμνονται κατά την ευθεία η που διέρχεται από το Ο. Η η είναι ευθεία του π, άρα τέμνει την ε στο Α. Η η είναι ευθεία του σ, άρα τέμνει την ε΄ στο Β, οπότε η η είναι η ζητούμενη ευθεία..

Διερεύνηση : Αν η // ε ή η // ε΄, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

2 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 262.

Δίνονται τρεις ευθείες ασύμβατες ανά δύο. Να κατασκευάσετε ευθεία που να τέμνει και τις τρεις.



Λύση

Έστω ε, ζ, η οι τρεις ευθείες που είναι ανά δυο ασύμβατες.

Ανάλυση. Έστω ξ η ζητούμενη ευθεία. Έστω σ = (ε,ξ). Τότε οι ευθείες ζ, η, ως ασύμβατες με την ε, τέμνουν το επίπεδο στα Α, Β, τα οποία είναι και σημεία της ε.

Σύνθεση. Θεωρούμε επίπεδο π που διέρχεται από τη ευθεία ε. Επειδή οι ζ, η είναι ασύμβατες προς την ε, θα τέμνουν το επίπεδο π στα σημεία Α, Β. Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ που βρίσκεται πάνω στο π (άρα είναι συνεπίπεδη με την ε). Έστω ότι η ΑΒ τέμνει την ε στο σημείο Μ. Η ευθεία ΑΒΜ (που την ονομάζουμε ξ) είναι η ζητούμενη ευθεία.

Διερεύνηση : Αν ΑΒ // ε, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση στο επίπεδο π.

Όμως υπάρχουν άπειρα επίπεδα που διέρχονται από την ε, άρα υπάρχουν άπειρες ευθείες ΑΒ , A_1B_1, … Από αυτές τις άπειρες ευθείες μόνο μια μπορεί να είναι παράλληλη με την ε (αν π.χ. ΑΒ // ε και A_1B_1 // ε, τότε θα ήταν και ΑΒ // A_1B_1 , οπότε οι ΑΒ, A_1B_1 θα όριζαν επίπεδο πάνω στο οποίο θα βρίσκονταν οι ζ, η, άτοπο γιατί οι ζ, η είναι ασύμβατες). Άρα τελικά το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

3 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ262.

Δίνονται κύκλος (c), σημείο Α και ευθεία (ε) μη συνεπίπεδα. Να κατασκευαστεί ευθεία (η), η οποία να διέρχεται από το Α και να τέμνει τον κύκλο (c) και την ευθεία (ε).

Λύση

Έστω σ το επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται ο κύκλος (c) και π το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο Α. Τα επίπεδα π και σ δεν ταυτίζονται (σε διαφορετική περίπτωση τα (c), Α και (ε) θα ήταν συνεπίπεδα). Επομένως διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

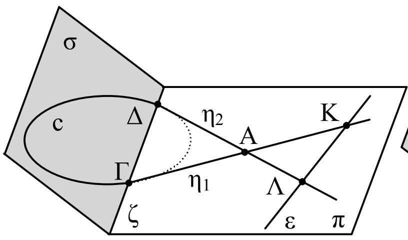
(Ι). π // σ. Τότε δεν υπάρχει λύση.

(ΙΙ). Τα π και σ δεν είναι παράλληλα, οπότε τέμνονται κατά την ευθεία (ζ).
Διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις :

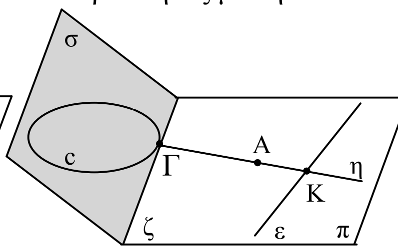
(ΙΙ$_α$). Η ευθεία (ζ) και ο κύκλος (c) δεν έχουν κοινά σημεία (σχήμα 3). Τότε ούτε ο κύκλος (c) έχει κοινά σημεία με το επίπεδο π (σε διαφορετική περίπτωση τα κοινά σημεία του (c) και του π θα ανήκαν στην ευθεία ζ, που είναι άτοπο).
Άρα το πρόβλημα δεν επιδέχεται λύση.

(ΙΙ$_β$). Η ευθεία (ζ) και ο κύκλος (c) έχουν μόνο ένα κοινό σημείο Γ (εφάπτονται) (σχήμα 2). Φέρνουμε τη την ευθεία η που συνδέει τα, Γ, Α. Τότε :
- Αν η // ε, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.
- Αν οι ευθείες η και ε τέμνονται στο Κ, τότε η ευθεία η αποτελεί λύση του προβλήματος.

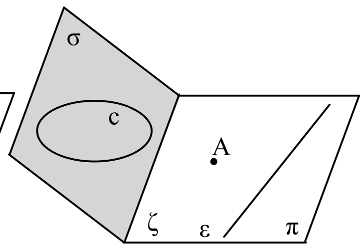
(ΙΙ$_γ$). Η ευθεία (ζ) και ο κύκλος (c) έχουν δυο κοινά σημεία, τα Γ, Δ (σχήμα 1). Θεωρούμε τις ευθείες ΓΑ και ΔΑ. Όποια από αυτές τέμνει την (ε) αποτελεί λύση του προβλήματος. Επομένως θα έχουμε είτε μια είτε δυο λύσεις, αφού δεν είναι δυνατόν να είναι και οι δυο παράλληλες με την ε.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

4 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 262.
Δίνονται οι τεμνόμενες ευθείες ΧΟΧ′ και ΨΟΨ′ και ευθεία ε ασύμβατη σε αυτές. Αν Μ τυχαίο σημείο της ε, να βρείτε την τομή των επιπέδων (Μ, Χ, Χ′) και (Μ, Ψ, Ψ′).

Λύση

Θέλουμε να βρούμε την τομή των επιπέδων $\pi = (\mathrm{M}, \mathrm{X}, \mathrm{X}')$ και $\sigma = (\mathrm{M}, \Psi, \Psi')$. Προφανώς τα π, σ δεν ταυτίζονται (σε αντίθετη περίπτωση οι ΧΟΧ΄, ΨΟΨ΄ θα ήταν συνεπίπεδες) και το Μ είναι κοινό σημείο των επιπέδων π και σ.
Η ευθεία ΧΟΧ΄ έχει με το π δυο κοινά σημεία, τα Χ και Χ΄. Άρα η ΧΟΧ΄ βρίσκεται πάνω στο π. Επομένως και το Ο είναι σημείο του π. Ομοίως το Ο είναι σημείο ταυ σ. Άρα το Ο είναι κοινό σημείο των επιπέδων π και σ.
Αφού τα διακεκριμένα σημεία Μ και Ο είναι κοινά σημεία των τεμνόμενων επιπέδων π και σ, άρα η τομή των επιπέδων π και σ είναι η ευθεία ΟΜ.
Παρατηρήσεις. Για να βρούμε την τομή δυο τεμνόμενων επιπέδων αρκεί να βρούμε δυο κοινά τους σημεία.

1 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 262.
Να αποδείξετε ότι επίπεδο και κύκλος, που δεν ανήκει σε αυτό, έχουν δύο το πολύ κοινά σημεία.

Λύση

Θεωρούμε το επίπεδο π και τον κύκλο c. Έστω σ το επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται ο c. Ας υποθέσουμε ότι ο c και το π έχουν κοινά τρία διακεκριμένα σημεία Α, Β, Γ. Τότε τα Α. Β, Γ ανήκουν στο σ (αφού είναι σημεία του c). Επίσης τα Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά (αφού είναι σημεία του κύκλου c).
Επομένως το π και το σ έχουν κοινά τρία διακεκριμένα και μη συνευθειακά σημεία, τα Α, Β, Γ, οπότε ταυτίζονται. Άρα ο c βρίσκεται πάνω στο π, άτοπο.

Αφού ο c και το π δεν έχουν τρία κοινά σημεία, άρα θα έχουν το πολύ δυο κοινά σημεία.

2 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 262.
Να αποδείξετε ότι τρεις ευθείες:
i) αν τέμνονται ανά δύο χωρίς να διέρχονται από ο ίδιο σημείο, τότε είναι συνεπίπεδες,
ii) αν τέμνονται ανά δύο χωρίς να είναι συνεπίπεδες, τότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Έστω ε_1, ε_2, ε_3 οι τρεις ευθείες που τέμνονται ανά δυο. Θα αποδείξουμε ότι :

(α). Αν οι ε_1, ε_2, ε_3 δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε οι ε_1, ε_2, ε_3 είναι συνεπίπεδες.

(β). Αν οι ε_1, ε_2, ε_3 δεν είναι συνεπίπεδες, τότε οι ε_1, ε_2, ε_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Είναι φανερό ότι οι προτάσεις (α), (β) είναι αντιθετοαντίστροφες, άρα είναι ισοδύναμες. Επομένως αν αποδείξουμε την (α), αυτόματα έχουμε αποδείξει και τη (β).

Έστω Α το σημείο τομής των ε_1, ε_2, Β το σημείο τομής των ε_2, ε_3 και Γ το σημείο τομής των ε_3, ε_1. Τότε η ε_1 είναι η ΑΓ, η ε_2 είναι η ΑΒ και η ε_3 είναι η ΒΓ.

Καταρχήν τα σημεία Α, Β, Γ δεν ταυτίζονται. Επίσης είναι διαφορετικά ανά δυο (αν ταυτίζονταν π.χ. τα Α, Β, τότε θα ταυτίζονταν οι ε_1, ε_2, ε_3, άτοπο). Επίσης τα Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά (αν τα Α, Β,Γ ήταν συνευθειακά, τότε οι ε_1, ε_2, ε_3 θα ταυτίζονταν, άτοπο).

Αφού τα Α, Β, Γ είναι μη συνευθειακά σημεία, τότε ορίζουν ένα επίπεδο, έστω το π.

Αφού τα Α, Β είναι σημεία του π, άρα η ΑΒ είναι ευθεία του π, δηλ. η ε_3 είναι ευθεία του π.

Όμοια οι ε_1, ε_2 είναι ευθείες του π. Άρα οι ε_1, ε_2, ε_3 είναι συνεπίπεδες (ανήκουν στο π).

3 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 262.
Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2, δύο σημεία Α και Β στην ε_1 και δύο σημεία Γ και στην ε_2. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ είναι ασύμβατες.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ ήταν συμβατές. Τότε υπάρχει επίπεδο π, πάνω στο οποίο βρίσκονται και οι δυο. Τότε τα σημαία Α, Β, Γ, Δ είναι σημεία του επιπέδου π.

Αφού τα Α, Β είναι σημεία του π, άρα και η ευθεία ΑΒ, δηλ. η ε_1, βρίσκεται πάνω στο π.

Αφού τα Α, Β είναι σημεία του π, άρα και η ευθεία ΑΒ, δηλ. η ε_2 βρίσκεται πάνω στο π.

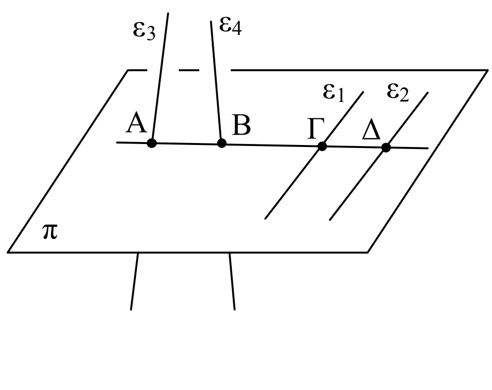
Αφού οι ε_1, ε_2 βρίσκονται πάνω στο π, άρα είναι συμβατές, άτοπο.

Επομένως οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ ήταν ασύμβατες.

4 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 262.
Δίνονται οι παράλληλες μεταξύ τους ευθείες ε_1, ε_2 και οι ευθείες ε_3, ε_4 τέτοιες ώστε η κάθε μια να είναι ασύμβατη και με την ε_1 και με την ε_2. Να κατασκευάσετε ευθεία που να τέμνει και τις τέσσερις ευθείες.

Λύση

Επειδή $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, υπάρχει επίπεδο π πάνω στο οποίο βρίσκονται και οι δυο. Επειδή η ε_3 είναι ασύμβατη και με την ε_1 και με την ε_2, τότε η ε_3 θα τέμνει το π σ' ένα



σημείο Α. Για τον ίδιο λόγο η ε_4 θα τέμνει το π σε σημείο Β.

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ, η οποία τέμνει τις παράλληλες ε_1, ε_2 στα σημεία Γ, Δ. Η ΑΒ είναι η ζητούμενη ευθεία.

Διερεύνηση : Αν ΑΒ // ε_1 // ε_2, τότε δεν έχουμε λύση. Αν η ΑΒ τέμνει τις ε_1, ε_2 στα Γ, Δ, τότε έχουμε μοναδική λύση.

5 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 262.

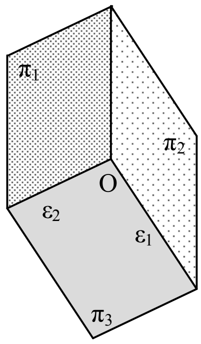
Να αποδείξετε ότι αν τρία επίπεδα τέμνονται ανά δύο, τότε οι τομές τους διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες.

Λύση

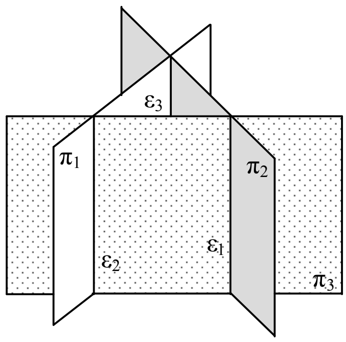
Έστω ε_1 η τομή των π_2, π_3, ε_2 η τομή των π_1, π_3, ε_3 η τομή των π_1, π_2.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(Ι). Οι ε_1, ε_2 (που είναι ευθείες του π_3) τέμνονται στο σημείο Ο. Το Ο είναι σημείο της ευθείας ε_1, άρα και σημείο του π_2. Το Ο είναι σημείο της ευθείας ε_2, άρα και σημείο του π_1. Επομένως το Ο είναι κοινό σημείο των π_1, π_2, οπότε βρίσκεται πάνω στην τομή των π_1, π_2, δηλ. πάνω στην ε_3. Επομένως το Ο είναι κοινό σημείο των ε_1, ε_2, ε_3, δηλ. οι ε_1, ε_2, ε_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

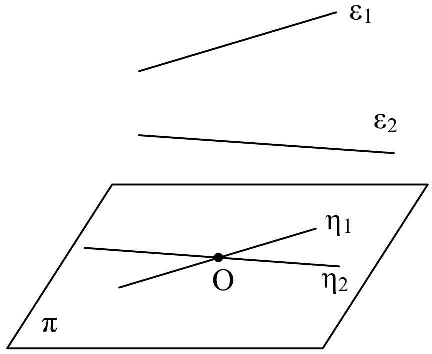
(ΙΙ). Οι ε_1, ε_2 (που είναι ευθείες του π_3) είναι παράλληλες.

Τότε η ε_3 είναι παράλληλη στην ε_1, γιατί : Αν οι ε_1, ε_3 τέμνονταν σε ένα σημείο Α, τότε το Α θα ήταν κοινό σημείο των π_1, π_2, π_3. Τότε από το Α θα περνούσε και η ε_2. Άρα οι ε_1, ε_2 θα τέμνονταν στο Α, άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι οι ε_1, ε_2 είναι παράλληλες.

Ασκήσεις παραγράφου 12.4.

1 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265

Από σημείο Ο να κατασκευάσετε επίπεδο παράλληλο σε δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2.

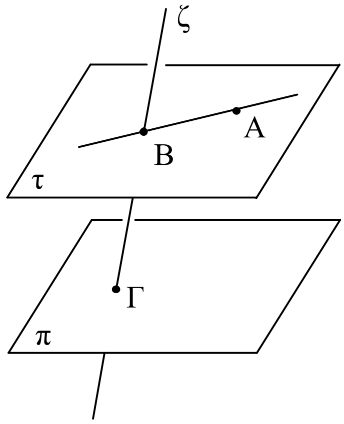


Λύση

Από το σημείο Ο φέρνουμε τις ευθείες η_1 // ε_1 και η_2 // ε_2. Οι η_1, η_2 ορίζουν επίπεδο π. Επειδή ε_1 // η_1, άρα ε_1 // π. Επειδή ε_2 // η_2, άρα ε_2 // π. Επομένως το π είναι το ζητούμενο επίπεδο και είναι μοναδικό.

2 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265

Να κατασκευάσετε ευθεία ε, που διέρχεται από γνωστό σημείο Α, είναι παράλληλη σε δοσμένο επίπεδο π που δεν περιέχει το Α και τέμνει ευθεία ξ, τέμνουσα το π.

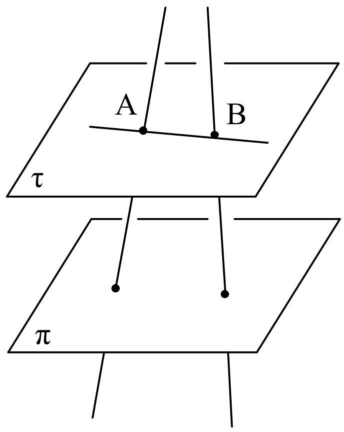


Λύση

Από το σημείο Α φέρνουμε επίπεδο τ // π. Επειδή ζ τέμνει το π (στο Γ), άρα θα τέμνει και το τ, έστω στο σημείο Β. Φέρνουμε την ευθεία ΑΒ, η οποία είναι η ζητούμενη και είναι μοναδική.

3 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265

Να κατασκευάσετε ευθεία ε, που είναι παράλληλη σε δοσμένο επίπεδο π και τέμνει δύο άλλες ασύμβατες ευθείες, οι οποίες τέμνουν το π.



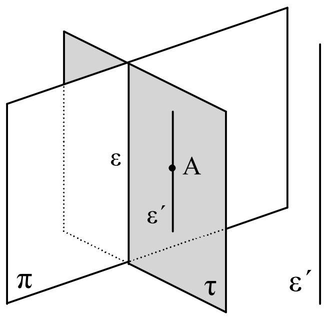
Λύση

Από το σημείο Α φέρνουμε επίπεδο τ // π. Επειδή ζ τέμνει το π (στο Β), άρα θα τέμνει και το τ, έστω στο σημείο Γ. Φέρνουμε την ευθεία ΑΓ, η οποία είναι η ζητούμενη.
Επειδή το σημείο Α μπορεί να επιλεγεί κατά άπειρους τρόπους, το ίδιο ισχύει και για το επίπεδο τα και για την ευθεία ΑΒ. Επομένως το πρόβλημα επιδέχεται άπειρες λύσεις.

4 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265

Αν μία ευθεία είναι παράλληλη στην τομή δύο επιπέδων, τότε είναι παράλληλη στα δύο επίπεδα ή ανήκει σε ένα από αυτά και είναι παράλληλη στο άλλο.

Λύση



Έστω π και τ δυο επίπεδα που τέμνονται κατά την ευθεία ε και ευθεία ε΄//ε. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

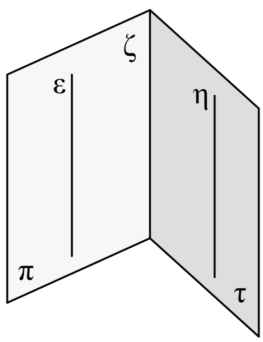
(Ι). Έστω ότι η ευθεία ε΄ δεν τέμνει κανένα από τα επίπεδα π και τ.. Τότε η ε΄ είναι παράλληλη προς την ευθεία ε του π, άρα είναι παράλληλη προς το π. Επίσης η ε΄ είναι παράλληλη προς την ευθεία ε του τ, άρα είναι παράλληλη προς το τ.

(ΙΙ). Έστω ότι η ευθεία ε΄ έχει κοινό σημείο (έστω το Α) με το επίπεδο π.. Τότε η ε΄ είναι παράλληλη προς την ε από το σημείο Α του π. Άρα η ε΄ είναι ευθεία του π.

(ΙΙΙ). Έστω ότι η ευθεία ε΄ έχει κοινό σημείο (έστω το Α) με το επίπεδο τ.. Τότε η ε΄ είναι παράλληλη προς την ε από το σημείο Α του τ. Άρα η ε΄ είναι ευθεία του τ.

Επομένως η ε΄ είτε είναι παράλληλη στα δύο επίπεδα ή ανήκει σε ένα από αυτά και είναι παράλληλη στο άλλο.

5 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265

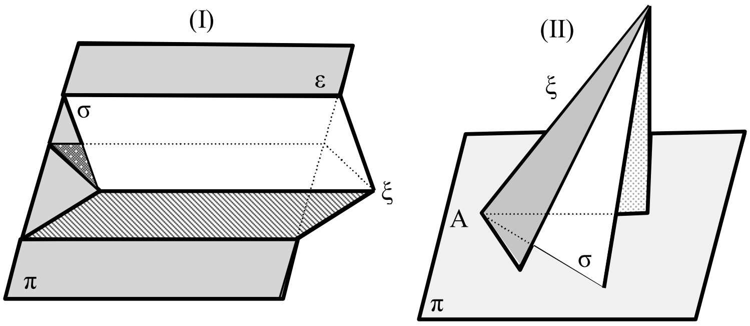


Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα διέρχονται αντίστοιχα από δύο παράλληλες ευθείες, τότε η τομή των επιπέδων είναι παράλληλη σε αυτές.

Λύση

Έστω ε και η δυο παράλληλες ευθείες που περιέχονται στα επίπεδα π και τ. Έστω επίσης ότι τα π και τ τέμνονται κατά την ευθεία ζ.
Επειδή ε // η, άρα θα είναι και ε // τ. Επειδή ε // τ, άρα θα είναι και ε // ζ.
Επομένως και ε // ζ, δηλ. ε // ζ // η.

6 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265



(Ι). Θεωρούμε επίπεδο π και ευθεία ξ//π. Να αποδειχθεί ότι όλα τα επίπεδα που περνάνε από ευθεία ξ τέμνουν το π κατά ευθείες παράλληλε μεταξύ τους.
(ΙΙ). Θεωρούμε επίπεδο π και ευθεία ξ που τέμνει το π . Να αποδειχθεί ότι όλα τα επίπεδα που περνάνε από την ευθεία ξ τέμνουν το π κατά ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

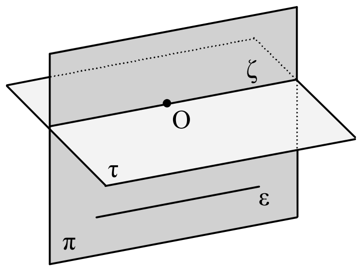
(Ι). Έστω σ επίπεδο που διέρχεται από την ξ και τέμνει το π κατά την ευθεία ε. Οι ξ, ε είναι παράλληλες (οι ξ, ε είναι ευθείες του σ και αν ετέμνοντο, τότε το κοινό τους σημείο θα ανήκε και στην ξ και στο π, άτοπο γιατί ξ // π).
Επειδή από την ξ διέρχονται άπειρα επίπεδα, άρα τα επίπεδα αυτά τέμνουν το π κατά παράλληλες προς την ξ ευθείες, οπότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
(ΙΙ). Έστω ότι η ξ τέμνει το π στο σημείο Α. Τότε οποιοδήποτε επίπεδο σ διέρχεται από την ξ, θα διέρχεται και από το Α, δηλ, το Α θα είναι κοινό σημείο των π, σ. Άρα η τομή των π, σ διέρχεται από το σταθερό σημείο Α.

7 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265

Από σημείο Ο να κατασκευασθεί επίπεδο παράλληλο σε δοσμένη ευθεία ε.

Λύση

Έστω π το επίπεδο που ορίζουν το Ο και η ε.



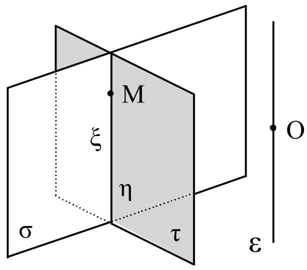
Ανάλυση. Έστω τ το ζητούμενο επίπεδο, δηλ. επίπεδο παράλληλο στην ε που διέρχεται από το Ο. Τα επίπεδα π και τα τέμνονται κατά την ευθεία ζ. Τότε ζ//ε (γιατί αν οι ευθείες ζ και ε του π τέμνονταν σε σημείο Μ, τότε το Μ θα ήταν κοινό σημείο της ε και του τα, δηλ. το τα δεν θα ήταν παράλληλο στην ε, άτοπο).
Σύνθεση – Απόδειξη. Στο επίπεδο π φέρνουμε από το Ο ευθεία ζ // ε. Τότε κάθε επίπεδο τ που διέρχεται από τη ζ είναι το ζητούμενο επίπεδο (αφού είναι ε // ζ,, θα είναι και ε // τ).
Διερεύνηση. Προφανώς υπάρχουν άπειρα σημεία που διέρχονται από τη ζ, οπότε το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

8 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265

Από δοσμένο σημείο να κατασκευάσετε ευθεία παράλληλη σε δύο τεμνόμενα επίπεδα.

Λύση

Ανάλυση. Έστω ε η ζητούμενη από το Ο ευθεία που είναι παράλληλη προς τα επίπεδα σ και τα, τα οποία τέμνονται κατά την ευθεία ξ.



Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ευθεία ξ, οπότε το Μ ανήκει και στα δυο επίπεδα σ και τ. Από το Μ φέρνουμε την ευθεία η // ε. Επειδή $\left.\begin{cases} \text{Μ σημείο του σ} \\ η//ε \end{cases}\right\}$, άρα η ευθεία η ανήκει στο σ. Για τον ίδιο λόγο η ευθεία η ανήκει στο π. Επομένως η ευθεία η είναι η τομή των π, σ, άρα ταυτίζεται με ξ. Αφού η // ε, άρα και ξ // ε, δηλ. η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη στην τομή των δυο επιπέδων.

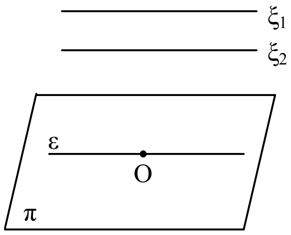
Σύνθεση – Απόδειξη. Έστω ξ η τομή των επιπέδων π και σ. Από το Ο φέρνουμε την ε // ξ. Η ε είναι η ζητούμενη ευθεία, γιατί $\left.\begin{cases} \text{ξ ευθεία του σ} \\ ε//ξ \end{cases}\right\}$, οπότε ε // σ. Όμοια ε // τ.

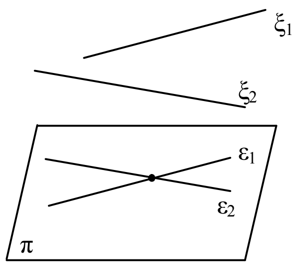
9 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 266

Από δοσμένο σημείο να κατασκευάσετε επίπεδο παράλληλο σε δύο δοσμένες ευθείες

Λύση

Έστω Ο το δοσμένο σημείο και $ξ_1$, $ξ_2$ οι δοσμένες ευθείες. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :





(Ι). $ξ_1$ // $ξ_2$.

Ανάλυση. Έστω π το ζητούμενο επίπεδο, δηλαδή διέρχεται από το Ο και είναι π // $ξ_1$ // $ξ_2$. Τότε, αν από το Ο φέρω την ευθεία ε // $ξ_1$ // $ξ_2$, αυτή θα βρίσκεται πάνω στο επίπεδο π.

Σύνθεση – Απόδειξη. Από το Ο φέρνω την ευθεία ε // $ξ_1$ // $ξ_2$. Τότε οποιοδήποτε επίπεδο π διέρχεται από την ε είναι παράλληλο στις $ξ_1$, $ξ_2$.

Διερεύνηση. Από την ε διέρχονται άπειρα επίπεδα, άρα το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

(ΙΙ). $ξ_1$, $ξ_2$ τέμνονται ή είναι ασύμβατες.

Ανάλυση. Έστω π το ζητούμενο επίπεδο, δηλαδή διέρχεται από το Ο και π // $ξ_1$ // $ξ_2$. Από το Ο φέρνω την ευθεία $ε_1$ // $ξ_1$. Επειδή π // $ξ_1$, η $ε_1$ είναι ευθεία του π. Για τον ίδιο λόγο αν από το Ο φέρω την ευθεία $ε_2$ //. $ξ_2$, αυτή θα είναι ευθεία του π. Επομένως το επίπεδο π ταυτίζεται με το ($ξ_1$,$ξ_2$).

Σύνθεση – Απόδειξη. Από το Ο φέρνω τις ευθείες $ε_1$ // $ξ_1$ και $ε_2$ // $ξ_2$. Το π = ($ξ_1$,$ξ_2$) είναι το ζητούμενο μοναδικό επίπεδο, γιατί είναι παράλληλο και στην $ε_1$ και στην $ε_2$.

10 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 266

Δίνονται τρεις τυχαίες ευθείες ε, $ε_1$ και $ε_2$, οι οποίες είναι ανά δυο ασύμβατες. Να κατασκευάσετε επίπεδο $σ_1$ που να περιέχει την $ε_1$ και επίπεδο $σ_2$ που να περιέχει την $ε_2$ τέτοια, ώστε η τομή των $σ_1$ και $σ_2$ να είναι παράλληλη στην ε.

Λύση

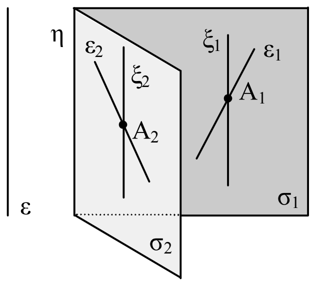
Ανάλυση. Έστω $σ_1$, $σ_2$ τα ζητούμενα επίπεδα, τα οποία διέρχονται από τις ασύμβατες $ε_1$, $ε_2$ και των οποίων η τομή η είναι παράλληλη με την ε.

Επειδή η ε είναι παράλληλη προς την ευθεία η του $σ_1$, θα είναι ε // $σ_1$.

Με όμοιο τρόπο ε // σ_2.

Από τυχαίο σημείο A_1 της ε_1 (άρα και του επιπέδου σ_1) φέρνουμε την ευθεία ξ_1 // ε. Επειδή ε // σ_1, η ξ_1 βρίσκεται στο επίπεδο σ_1.

Επίσης από τυχαίο σημείο A_2 της ε_2 (άρα και του επιπέδου σ_2) φέρνουμε την ευθεία ξ_2 // ε. Επειδή ε // σ_2, η ξ_2 βρίσκεται στο επίπεδο σ_2.



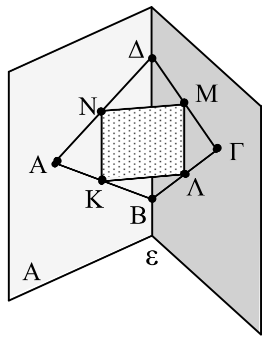
Σύνθεση – Απόδειξη. Από τυχαίο σημείο A_1 της ε_1 φέρνουμε την ξ_1//ε. Θεωρούμε το επίπεδο $\sigma_1 = (\varepsilon_1, \xi_1)$. Από τυχαίο σημείο A_2 της ε_2 φέρνουμε την ξ_2//ε. Θεωρούμε το επίπεδο $\sigma_2 = (\varepsilon_2, \xi_2)$. Τα επίπεδα σ_1, σ_2 είναι τα ζητούμενα γιατί :

- Περιέχουν τις ε_1, ε_2 αντίστοιχα.
- Επειδή την ξ_1 //ε (1) και ξ_2 // ε (2), θα είναι και ξ_1 // ξ_2, οπότε σύμφωνα με την άσκηση 5 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 268 η τομή η των σ_1 , σ_2 θα ήταν η // ξ_1 // ξ_2 (3). Από τις (1), (2), (3) έχουμε ότι η//ε.

1 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 266

Αν Α, Β, Γ, Δ είναι τέσσερα σημεία που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, το σχήμα που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ λέγεται **στρεβλό τετράπλευρο** και γράφεται ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση



Έστω Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ : $\left\{\begin{matrix} \text{Ν μέσο του ΑΔ} \\ \text{Κ μέσο του ΑΒ} \end{matrix}\right\}$, οπότε ΝΚ // ΔΒ (1) και $NK = \dfrac{\Delta B}{2}$ (2).

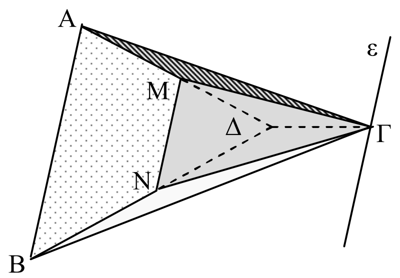
Στο τρίγωνο ΓΒΔ : $\left\{\begin{matrix} \text{Μ μέσο του ΓΔ} \\ \text{Λ μέσο του ΓΒ} \end{matrix}\right\}$, οπότε ΜΛ // ΔΒ (3) και $M\Lambda = \dfrac{\Delta B}{2}$ (4).

Από τις (1), (3) συμπεραίνουμε ότι ΝΚ // ΜΛ (5). Επίσης από τις (2), (4) συμπεραίνουμε ότι ΝΚ=ΜΛ (6). Από τις (5), (6) συμπεραίνουμε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Παρατήρηση. Ακριβώς το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για τυχαίο τετράπλευρο του επιπέδου. Μάλιστα έχουμε τον ίδιο τρόπο απόδειξης.

2 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 266

Δίνεται στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν σημεία επί των ΔΑ και ΔΒ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\dfrac{\Delta M}{MA} = \dfrac{\Delta N}{NB}$. Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα (Μ, Ν, Γ) και (Α, Β, Γ) τέμνονται κατά ευθεία παράλληλη στην ΑΒ.



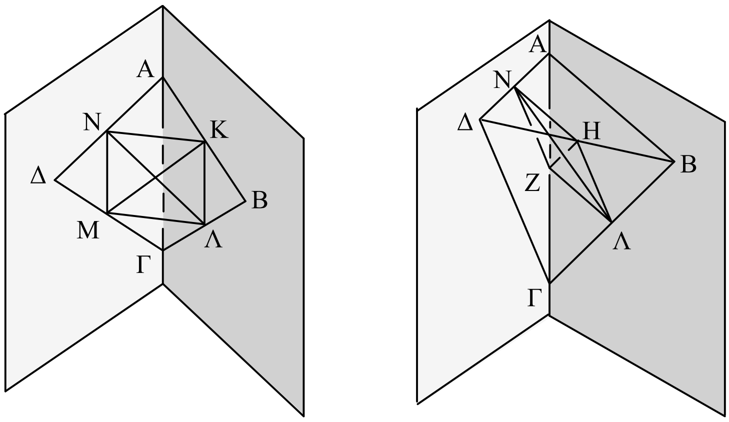
Λύση

Επειδή $\dfrac{\Delta M}{MA} = \dfrac{\Delta N}{NB}$, με βάση το Θ.Θ. στο επίπεδο (Δ,Α,Β) είναι MN//AB. Τα επίπεδα (M, N, Γ) και (A, B, Γ) έχουν κοινό σημείο το Γ. Άρα τέμνονται κατά ευθεία ε που διέρχεται από το Γ. Τότε με βάση την άσκηση 5 εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 268 θα είναι AB//MN//ε.

3 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 266

Σε στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τα μέσα των απέναντι πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα τα οποία διχοτομούνται.

Λύση



Θεωρούμε το στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Τα Δ, Α, Γ βρίσκονται σε ένα επίπεδο και τα Α, Β, Γ σε άλλο.

Στο τρίγωνο ΔΑΓ : $\left\{\begin{matrix} \text{Ν μέσο ΔΑ} \\ \text{Μ μέσο ΔΓ} \end{matrix}\right\}$,

οπότε ΝΜ // ΑΓ (1) και $\text{ΝΜ} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$ (2)

Στο τρίγωνο ΒΑΓ $\left\{\begin{matrix} \text{Κ μέσο ΒΑ} \\ \text{Λ μέσο ΒΓ} \end{matrix}\right\}$,

οπότε ΚΛ // ΑΓ (3) και $\text{ΚΛ} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$ (4).

Από τις (1), (2), (3), (4) προκύπτει ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλ. τα ευθ. τμήματα ΚΜ, ΛΝ έχουν κοινό μέσο (5).

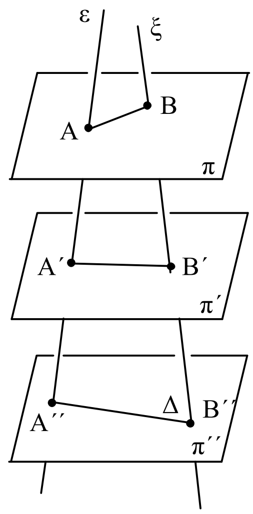
Στο τρίγωνο ΔΑΓ $\left\{\begin{matrix} \text{Ν μέσο ΔΑ} \\ \text{Ζ μέσο ΑΓ} \end{matrix}\right\}$, οπότε ΝΖ // ΔΓ (6) και $\text{ΝΖ} = \dfrac{\text{ΔΓ}}{2}$ (7)

Στο τρίγωνο ΒΔΓ $\left\{\begin{matrix} \text{Η μέσο ΒΔ} \\ \text{Λ μέσο ΒΓ} \end{matrix}\right\}$, οπότε ΗΛ // ΔΓ (8) και $\text{ΗΛ} = \dfrac{\text{ΔΓ}}{2}$ (9).

Από τις (6), (7), (8), (9) προκύπτει ότι το ΝΖΛΗ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλ. τα ευθ. τμήματα ΖΗ, ΛΝ έχουν κοινό μέσο (10).

Από τις (5), (10) προκύπτει ότι τα ευθ. τμήματα ΚΜ, ΛΝ, ΖΗ έχουν κοινό μέσο (δηλ. διχοτομούνται).

Παρατήρηση. Ακριβώς το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για τυχαίο τετράπλευρο του επιπέδου. Μάλιστα έχουμε τον ίδιο τρόπο απόδειξης.



4 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 266

Αν Α, Α′, Α″ είναι σημεία ευθείας ε και Β, Β′, Β″ είναι σημεία ευθείας ξ, όπου οι ευθείες ε και ξ είναι ασύμβατες και ισχύει $\dfrac{\text{ΑΑ}'}{\text{Α}'\text{Α}''} = \dfrac{\text{ΒΒ}'}{\text{Β}'\text{Β}''}$ (1), τότε οι ευθείες ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο (αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή).

Λύση

Οι ευθείες ΑΒ, Α΄Β΄ είναι ασύμβατες, γιατί : Αν ήταν συμβατές, τότε θα όριζαν το επίπεδο (ΑΒ,Α′Β′). Τα σημεία Α, Β, Α′, Β′ θα ανήκαν στο επίπεδο αυτό, οπότε και οι ΑΑ′, ΒΒ′ θα ανήκαν σε αυτό, δηλ. οι ε, ξ θα ήταν

συνεπίπεδες, άτοπο.
Σύμφωνα με εφαρμογή του Σχολικού υπάρχουν μοναδικά επίπεδα π, π′ που περιλαμβάνουν τις ΑΒ, Α΄Β΄ αντίστοιχα και είναι παράλληλα. Επίσης από το Α″ φέρνουμε επίπεδο π′΄ // π // π′, το οποίο υποθέτουμε ότι τέμνει την ΒΒ′ στο Δ. Τότε, από το θεώρημα του Θαλή, ισχύει $\frac{AA'}{A'A''}=\frac{BB'}{B'\Delta}$ (2).

Από τις (1), (2) έχουμε ότι $\frac{BB'}{B'B''}=\frac{BB'}{B'\Delta} \Leftrightarrow B'B''=B'\Delta$, οπότε τα σημεία Β΄΄, Δ ταυτίζονται. Επομένως το Β″ είναι σημείο του π″.
Άρα οι ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ ανήκουν στα επίπεδα π, π′, π′΄ αντίστοιχα, που είναι μεταξύ τους παράλληλα, οπότε οι ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο.

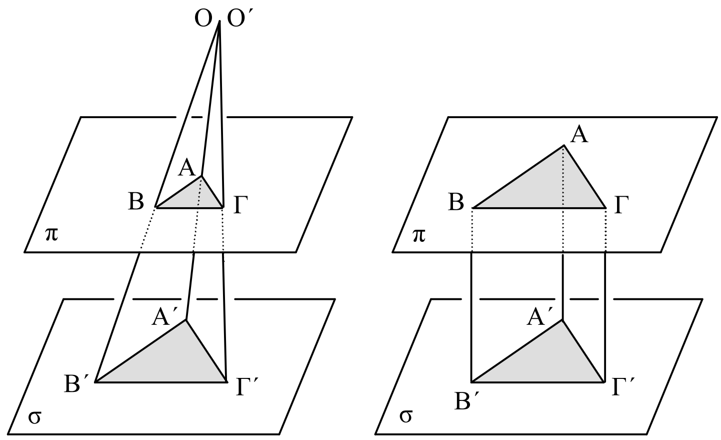
1 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 266
Αν ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι δύο τρίγωνα που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα και επιπλέον ανά δύο οι πλευρές τους είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΒ//Α′Β′, ΒΓ//Β′Γ′ και ΑΓ//Α′Γ′, τότε οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′ διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες. (Δύο τέτοια τρίγωνα λέγονται ομόλογα).

Λύση

Επειδή ΑΒ//Α′Β′, ΒΓ//Β′Γ′, ΑΓ//Α′Γ′, έχουμε $\left(A=\hat{A}' \text{ ή } A+\hat{A}'=180^0\right)$ και $\left(B=\hat{B}' \text{ ή } B+\hat{B}'=180^0\right)$ και $\left(\Gamma=\hat{\Gamma}' \text{ ή } \Gamma+\hat{\Gamma}'=180^0\right)$.

Οι δυο πρώτες σχέσεις συνδυάζονται ως εξής :

$$\begin{Bmatrix}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}+\hat{B}'=180^0\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}\hat{A}+\hat{A}'=180^0\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}\hat{A}+\hat{A}'=180^0\\ \hat{B}+\hat{B}'=180^0\end{Bmatrix}.$$



- Από την $1^η$ περίπτωση προκύπτει ότι $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$ (1).
- Η $4^η$ περίπτωση $\begin{Bmatrix}\hat{A}+\hat{A}'=180^0\\ \hat{B}+\hat{B}'=180^0\end{Bmatrix}$ αποκλείεται γιατί αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δυο σχέσεις, προκύπτει ότι
  $\hat{A}+\hat{A}'+\hat{B}+\hat{B}'=360^0 \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{\Gamma}'=\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}'+360^0$
  $\Leftrightarrow 180^0+180^0=\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}'+360^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}'=0^0$,άτοπο.
- Η $2^η$ περίπτωση χωρίζεται στις εξής δυο υποπεριπτώσεις :
  - $\begin{Bmatrix}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}+\hat{B}'=180^0\\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'\end{Bmatrix}$. Επειδή $\begin{Bmatrix}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'\end{Bmatrix}$, έχουμε $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$

➢ $\begin{Bmatrix} \hat{A}=\hat{A}' \\ \hat{B}+\hat{B}'=180^0 \\ \hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}'=180^0 \end{Bmatrix}$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις έχουμε ότι $\hat{B}+\hat{B}'+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}'=180^0+180^0 \Leftrightarrow 180^0-\hat{A}+180^0-\hat{A}'=180^0+180^0 \Leftrightarrow \hat{A}=0^0$, άτοπο.

Επομένως σε κάθε περίπτωση έχουμε $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$

- Από την $3^{η}$ περίπτωση προκύπτει όμοια ότι $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$.

Επομένως αποδείξαμε ότι $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$, οπότε $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma A}{\Gamma'A'}=\lambda$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

❖ $\lambda \neq 1$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι λ < 1 (αν λ >1, τότε αντιστρέφουμε τα κλάσματα και έχουμε πάλι λόγο μικρότερο του 1).
Τότε ΑΒ < Α΄Β΄ και ΒΓ < Β΄Γ΄. Τότε στο επίπεδο (ΑΒ,Α΄Β΄) οι ΑΑ΄, ΒΒ΄ τέμνονται στο Ο (αν ήταν παράλληλες, τότε το ΑΒΒ΄Α΄ θα ήταν παραλληλόγραμμο με ΑΒ = Α΄Β΄, οπότε λ=1, άτοπο) Όμοια οι ΒΒ΄, ΓΓ΄ τέμνονται στο Ο΄. Για να αποδείξουμε ότι οι ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ συντρέχουν, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα Ο, Ο΄ ταυτίζονται.
Αφού $O\overset{\Delta}{A}B \approx O\overset{\Delta}{A'}B'$, $O\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx O\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$ είναι $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}$. και $\frac{O'B}{O'B'}=\frac{O'\Gamma}{O'\Gamma'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$.
Από τις $\begin{Bmatrix} \frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'} \\ \frac{O'B}{O'B'}=\frac{O'\Gamma}{O'\Gamma'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \end{Bmatrix}$ προκύπτει ότι $\frac{OB}{OB'}=\frac{O'B}{O'B'} \Leftrightarrow \frac{OB}{OB'-OB}=\frac{O'B}{O'B'-O'B}$, δηλ.
$\frac{OB}{B'B}=\frac{O'B}{B'B} \Leftrightarrow OB=O'B$, οπότε τα σημεία Ο, Ο΄ ταυτίζονται.

❖ $\lambda=1$. Τότε $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma A}{\Gamma'A'}=1 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} AB=A'B' \\ B\Gamma=B'\Gamma' \\ \Gamma A=\Gamma'A' \end{Bmatrix}$ Επειδή είναι και $\begin{Bmatrix} AB//A'B' \\ B\Gamma//B'\Gamma' \\ \Gamma A//\Gamma'A' \end{Bmatrix}$, τα ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄, ΓΑΑ΄Γ΄ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΑΑ΄// ΒΒ΄// ΓΓ΄.

2 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 266

Αν ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι δύο τρίγωνα που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα και επιπλέον, οι πλευρές ΑΒ και Α′Β′ τέμνονται στο σημείο Γ_1, οι ΒΓ και Β′Γ′ τέμνονται στο A_1 και οι ΑΓ και Α′Γ′ τέμνονται στο B_1, τότε:

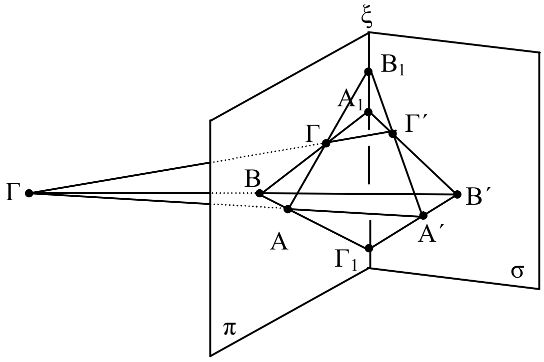
i) τα σημεία A_1, B_1, Γ_1 είναι συνευθειακά και
ii) οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′ διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες. (Δύο τέτοια τρίγωνα λέγονται ομόλογα).

Λύση

i) Έστω π και σ τα επίπεδα πάνω στα οποία βρίσκονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Αν A_1 είναι το σημείο τομής των ΒΓ, Β΄Γ΄, τότε το A_1 είναι σημείο του π (γιατί η ΒΓ είναι ευθεία του π) και όμοια το A_1 είναι σημείο του σ. Άρα το A_1 βρίσκεται πάνω στην τομή ξ των π και σ.

Όμοια τα B_1, $Γ_1$ βρίσκονται πάνω στην τομή ξ των π και σ.

Επομένως τα σημεία Α, B_1, $Γ_1$ είναι συνευθειακά (βρίσκονται πάνω στην ξ).



ii) Οι ΒΓ και Β′Γ′ τέμνονται στο A_1 δηλ. οι ΒΓ και Β′Γ′ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο (A_1ΓΒ, A_1Γ′Β′). Όμοια οι ΑΓ και Α′Γ′ τέμνονται στο B_1 δηλ. οι ΑΓ και Α′Γ′ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο (B_1ΓΑ, B_1Γ′Α′). Επίσης οι ΒΑ και Β′Α′ τέμνονται στο $Γ_1$ δηλ. οι ΒΑ και Β′Α′ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο ($Γ_1$ΑΒ, $Γ_1$Α′Β′).

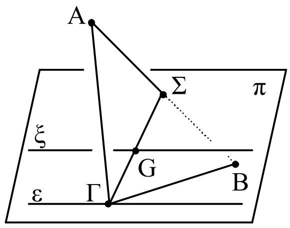
Έτσι, σύμφωνα με την αποδεικτική άσκηση 5 §12.3, οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′ διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες.

3 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 266

Δίνεται ευθεία ε και δύο τυχαία σημεία Α και Β εκτός αυτής, ώστε οι ευθείες ΑΒ και ε να είναι ασύμβατες. Αν Γ τυχαίο σημείο της ε, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του βαρύκεντρου του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Έστω Σ το μέσο του ΑΒ, η διάμεσος ΓΣ του τριγώνου ΑΒΓ και G το βαρύκεντρο του ΑΒΓ. Τότε $\frac{ΣG}{ΣΓ}=\frac{1}{3}$. Θεωρούμε επίσης το επίπεδο π=(Σ,ε).



Σ’ αυτό το επίπεδο είναι $\frac{ΣG}{ΣΓ}=\frac{1}{3}$, οπότε, από τον γνωστό γ.τ. της Επιπεδομετρίας, ο ζητούμενος γ.τ. είναι ευθεία ξ του π παράλληλη στην ε με $d(Σ,ξ)=\frac{1}{3}d(Σ,ε)$

Ασκήσεις παραγράφου 12.5.

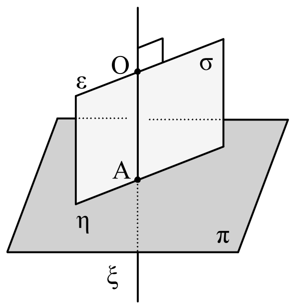
1 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 271

Να αποδείξετε ότι μία ευθεία και ένα επίπεδο κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα ή ότι το επίπεδο περιέχει την ευθεία.

Λύση

Θεωρούμε την ευθεία ξ και την ευθεία ε ⊥ ξ στο σημείο Ο και το επίπεδο π κάθετο στην ξ στο σημείο Α. Θα αποδείξουμε ότι ε // π.

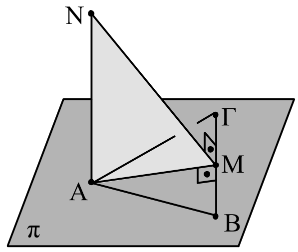
Θεωρούμε το επίπεδο σ = (ε,ξ), το οποίο τέμνει το π κατά την ευθεία η, η οποία προφανώς διέρχεται από το Α. Επειδή ξ ⊥ π, άρα η ⊥ ξ. Στο επίπεδο σ είναι $\left.\begin{array}{l} ε \perp ξ \\ η \perp ξ \end{array}\right\}$. Άρα ε //η. Επειδή ε //η, άρα είναι και ε // π.



Διερεύνηση. Στην περίπτωση που τα σημεία Ο, Α ταυτίζονται, τότε η ε βρίσκεται πάνω στο π.

2 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 271
Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, Μ το μέσο της βάσης ΒΓ και ΑΝ ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι
i) η ευθεία ΜΝ είναι κάθετη στην ΒΓ,
ii) η ΒΓ είναι κάθετη στο επίπεδο (Α, Μ, Ν).

Λύση

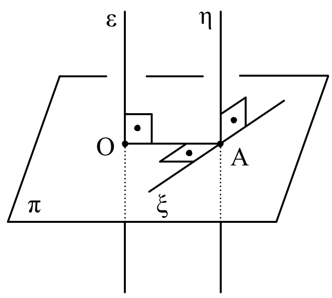


(Ι). ΑΜ διάμεσος του ισ. τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), άρα ΑΜ είναι και ύψος, δηλ. ΑΜ $\perp$ ΒΓ. Είναι $\left\{\begin{matrix} AN \perp \pi \\ AM \perp B\Gamma \end{matrix}\right\}$, οπότε από το θεώρημα των τριών καθέτων είναι και ΝΜ $\perp$ ΒΓ.

(ΙΙ). $AM\left\{\begin{matrix} B\Gamma \perp NM \\ B\Gamma \perp AM \end{matrix}\right\}$, οπότε το επίπεδο (Α, Μ, Ν) που περιέχει τις ΝΜ, ΑΜ είναι κάθετο στη ΒΓ.

3 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 271
Να αποδείξετε ότι αν δύο ευθείες είναι ορθογώνιες, τότε υπάρχει επίπεδο που περιέχει τη μία και είναι κάθετο στην άλλη, και αντίστροφα.

Λύση



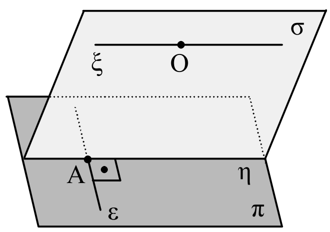
(Ι). Υποθέτουμε ότι οι ευθείες ε, ξ είναι ορθογώνιες. Θεωρούμε την κοινή κάθετη ΟΑ των ε, ξ, όπου Ο σημείο της ε και Α σημείο της η. Θεωρούμε το επίπεδο π = (ΟΑ,ξ). Επειδή η ε είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ του π και ορθογώνια στην ευθεία ξ του π, είναι ε $\perp$ π. Άρα αποδείξαμε ότι υπάρχει επίπεδο που περιέχει τη ξ και είναι κάθετο στην ε.

(Ι). Υποθέτουμε ότι υπάρχει επίπεδο π που περιλαμβάνει την ξ και είναι κάθετο στην ε. Επειδή η ε είναι κάθετη στο π, άρα είναι ορθογώνια σε κάθε ευθεία του π, άρα και στην ξ.

4 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 271
Να κατασκευάσετε ευθεία ξ που διέρχεται από σημείο Ο, είναι παράλληλη σε επίπεδο π και ορθογώνια σε ευθεία ε του π.

Λύση

Ανάλυση. Έστω ξ η ζητούμενη ευθεία που διέρχεται από το Ο είναι παράλληλη στο π και είναι ορθογώνια με την ευθεία ε του π.



Θεωρούμε τυχαίο επίπεδο σ που διέρχεται από την ευθεία ξ και τέμνει το επίπεδο π κατά την ευθεία η.

Επειδή ξ // π, θα είναι ξ // η. Επειδή $\left\{\begin{matrix} \xi // \eta \\ \xi \text{ ορθογώνια με την } \varepsilon \end{matrix}\right\}$, άρα θα είναι η $\perp$ ε. Επίσης η η τέμνει την ε στο Α.

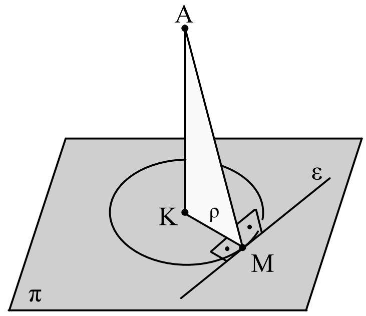
Σύνθεση. Έστω Α τυχαίο σημείο της ε και η η ευθεία του π που άγεται από το Α και είναι κάθετη στην ε. Θεωρούμε το επίπεδο σ = (Ο,η). Από το Ο φέρνουμε στο σ ευθεία ξ // η. Η ξ είναι η ζητούμενη ευθεία, αφού πληροί όλοες τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Διερεύνηση. Παρόλο που υπάρχουν άπειρα επίπεδα σ, όμως προφανώς η ευθεία ξ είναι μοναδική.

1 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 271

Έστω (Κ, ρ) ένας κύκλος, ΑΚ ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο επίπεδο π του κύκλου και Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ.

Λύση



Φέρνουμε την ΚΜ και την εφαπτομένη ε του κύκλου στο Μ. Επειδή η ΚΜ είναι ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής της ευθείας ε, είναι $ΚΜ \perp ε$.

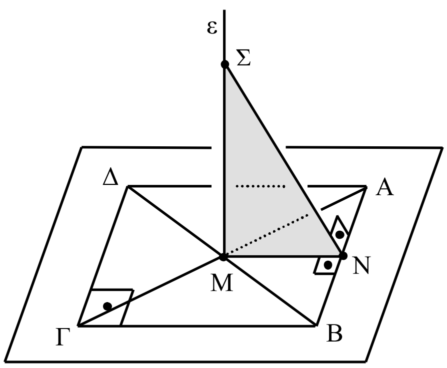
Επειδή $\left\{\begin{matrix} ΑΚ \perp π \\ ΚΜ \perp ε \end{matrix}\right\}$, άρα, από το θεώρημα των τριών καθέτων, προκύπτει ότι $ΑΜ \perp ε$.

Παρατήρηση. Με τη βοήθεια του θεωρήματος των τριών καθέτων μπορούμε να επεκτείνουμε προτάσεις του επιπέδου στο χώρο.

2 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 271

Από το κέντρο Μ ορθογωνίου ΑΒΓΔ φέρουμε την ευθεία ε κάθετη στο επίπεδο του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που ορίζεται από το τυχαίο σημείο της ε και το μέσο Ν της ΑΒ είναι κάθετη στην ΑΒ και ορθογώνια στη ΓΔ.

Λύση



Έστω Σ σημείο της ε. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΓ = ΒΔ, οπότε $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow ΜΑ = ΜΒ$, δηλ. το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΑΒ η ΜΝ είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, δηλ. $ΜΝ \perp ΑΒ$. Επειδή $\left\{\begin{matrix} ΣΜ \perp π \\ ΜΝ \perp ΑΒ \end{matrix}\right\}$, από το θεώρημα των τριών καθέτων προκύπτει ότι θα είναι και $ΣΝ \perp ΑΒ$.

Επειδή $\left\{\begin{matrix} ΣΝ \perp ΑΒ \\ ΓΔ // ΑΒ \end{matrix}\right\}$, άρα η ΣΝ είναι ορθογώνια με τη ΓΔ.

3 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 271

Σε επίπεδο π φέρουμε κύκλο διαμέτρου ΑΒ και έστω Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Φέρουμε, επίσης, το τμήμα ΑΣ, κάθετο στο επίπεδο π στο Α, το τμήμα ΑΓ κάθετο στην ευθεία ΣΒ στο Γ και το τμήμα ΑΝ κάθετο στην ευθεία ΣΜ στο Ν. Να αποδείξετε ότι

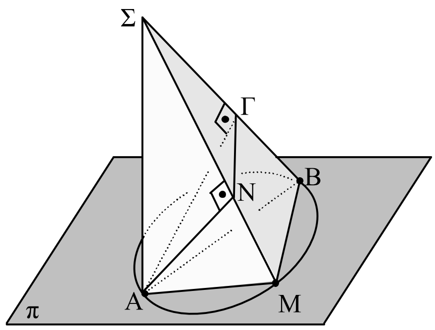
i) $Σ\hat{Μ}Β = 90^0$,

ii) $ΣΑ^2 = ΣΜ \cdot ΣΝ = ΣΒ \cdot ΣΓ$,

iii) τα τρίγωνα ΣΓΝ και ΣΜΒ είναι όμοια,

iv) $Σ\hat{Γ}Ν = 90^0$,

v) η ΣΓ είναι κάθετη στο επίπεδο (Ν,Γ,Α),



vi) $\Gamma\hat{N}A = 90^0$,

vii) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ν, αν το Μ κινείται στον παραπάνω κύκλο.

Λύση

Είναι $A\hat{M}B = 90^0$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

i) Είναι $\left.\begin{cases} A\Sigma \perp \pi \\ AM \perp MB \end{cases}\right\}$, οπότε ΣΜ ⊥ ΜΒ, δηλ. $\Sigma\hat{M}B = 90^0$.

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΣΜ ($\hat{A} = 90^0$ γιατί ΑΣ ⊥ π, οπότε και ΑΣ ⊥ ΑΜ) το ΑΜ είναι ύψος, άρα $\Sigma A^2 = \Sigma M \cdot \Sigma N$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΣΒ ($\hat{A} = 90^0$ γιατί ΑΣ ⊥ π, οπότε και ΑΣ ⊥ ΑΒ) το ΑΓ είναι ύψος, άρα $\Sigma A^2 = \Sigma B \cdot \Sigma\Gamma$.

iii) Από την $\Sigma M \cdot \Sigma N = \Sigma B \cdot \Sigma\Gamma \Leftrightarrow \dfrac{\Sigma M}{\Sigma B} = \dfrac{\Sigma\Gamma}{\Sigma N}$. Επίσης $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}$. Άρα τα τρίγωνα ΣΓΝ και ΣΜΒ είναι όμοια.

iv) Επειδή $\overset{\Delta}{\Sigma\Gamma N} \approx \overset{\Delta}{\Sigma M B}$, άρα $\Sigma\hat{\Gamma}N = \Sigma\hat{M}B = 90^0$

v) Είναι $\Sigma\hat{\Gamma}N = 90^0$, οπότε ΣΓ ⊥ ΓΝ. Επίσης ΣΓ ⊥ ΓΑ (αφού ΑΓ ύψος του $\overset{\Delta}{AB\Sigma}$). Επομένως ΣΓ ⊥ (Ν,Γ,Α). Αφού ΣΓ ⊥ (Ν,Γ,Α), άρα

vi) Επειδή ΣΓ ⊥ (Ν,Γ,Α) και ΑΝ ευθεία του (Ν,Γ,Α), άρα η ΑΝ είναι ορθογώνια με τη ΣΓ. Επίσης ΑΝ ⊥ ΣΝ. Επομένως ΑΝ ⊥ (Σ,Γ,Ν), θα είναι ΑΝ ⊥ ΓΝ, δηλ. $\Gamma\hat{N}A = 90^0$.

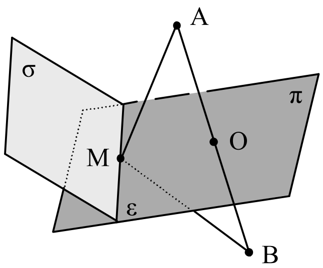
vii) Το επίπεδο (Γ,Ν,Α) είναι κάθετο στην ευθεία ΣΒ στο σταθερό σημείο της Γ. Άρα το επίπεδο (Γ,Ν,Α) είναι σταθερό. Στο (Γ,Ν,Α) τα Α, Γ είναι σταθερά και $\Gamma\hat{N}A = 90^0$, οπότε το Ν κινείται στον κύκλο επιπέδου (Γ,Ν,Α) με διάμετρο ΑΓ. (όχι γεωμ. τόπος)

Ασκήσεις παραγράφου 12.6.

1 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ενός επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από δύο σημεία που δεν ανήκουν σε αυτό.

Λύση



Έστω Α, Β δυο σημεία που δεν ανήκουν στο επίπεδο π.

Ευθύ. Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ. Επειδή ΜΑ = ΜΒ, άρα το Μ βρίσκεται στο μεσοκάθετο επίπεδο σ του ΑΒ. Επειδή επίσης το Μ βρίσκεται στο επίπεδο π, άρα το Μ βρίσκεται πάνω στην τομή ε των επιπέδων π και σ.

Αντίστροφο. Όλοι οι παραπάνω ισχυρισμοί αντιστρέφονται, οπότε ο ζητούμενος γ.τ. είναι η τομή ε των π, σ.

Διερεύνηση. Αν το σ // π ⇔ ΑΒ ⊥ π, τότε ο γ.τ. είναι το κενό σύνολο.
Επίσης, αν τα σ, π ταυτίζονται (αυτό συμβαίνει όταν το σ είναι το μεσοκάθετο επίπεδο του ΑΒ), τότε ο γ.τ. είναι το σ.

2 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274

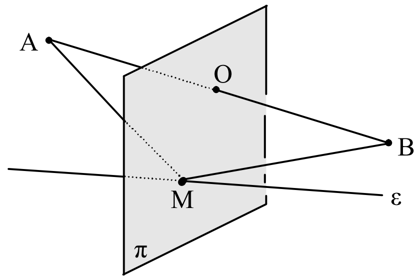
Δίνονται δύο σημεία Α και Β και ευθεία ε, ασύμβατη με την ΑΒ. Να βρείτε σημείο Μ της ε τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΑΒΜ να είναι ισοσκελές.

Λύση

Ανάλυση. Έστω το ζητούμενο σημείο της ε. Επειδή MA=MB, το M βρίσκεται στο μεσοκάθετο επίπεδο π του AB, οπότε είναι η τομή των π, ε.

Σύνθεση – Απόδειξη. Τα M είναι η τομή των ε, π.

Διερεύνηση. Αν ε // π, δεν έχουμε λύση. Αν η ε είναι ευθεία του π, τότε έχουμε άπειρες λύσεις.



3 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274

Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία ε που τέμνει πλάγια ένα επίπεδο π είναι κάθετη σε μία μόνο ευθεία του π. **(Προφανώς εννοεί να γίνει και η κατασκευή)**

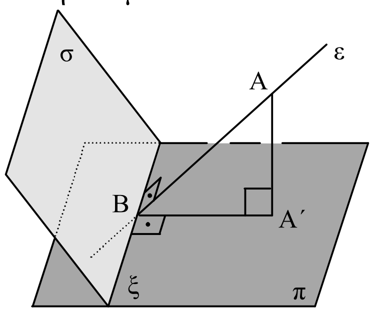
Λύση

Έστω A΄ η προβολή του A στο επίπεδο π και B το σημείο στο οποίο η ε τέμνει το π. Από το B φέρνω το επίπεδο σ κάθετο στην ευθεία ε. Έστω ξ η τομή των επιπέδων π και σ.

Η ξ είναι η ζητούμενη ευθεία, γιατί :

Αφού ε ⊥ σ, άρα η ε είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του σ, οπότε είναι και ε ⊥ ξ, δηλαδή η ξ είναι η ζητούμενη ευθεία.

Όμως η ξ είναι η μοναδική ευθεία του π που είναι κάθετη στην ε, γιατί : Επειδή $\left\{\begin{matrix} AA' \perp \pi \\ AB \perp \xi \end{matrix}\right\}$, θα είναι και A΄B ⊥ ξ. Όμως η ξ είναι η μοναδική ευθεία του π που είναι κάθετη στην A΄B.



4 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274

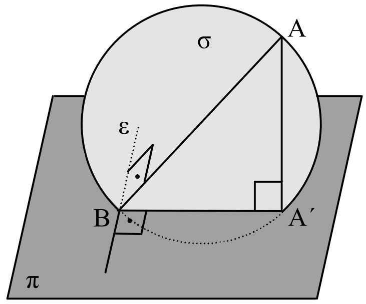
Έστω επίπεδο π, ευθεία ε του π και A σημείο εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής A′ του σημείου A στο επίπεδο π, όταν το π περιστρέφεται γύρω από την ευθεία ε.

Λύση

Έστω A΄ η προβολή του A στο π και στο επίπεδο (A,ε), η A΄B ⊥ ε. Το B είναι σταθερό σημείο της ε. Επειδή $\left\{\begin{matrix} AA' \perp \pi \\ A'B \perp \varepsilon \end{matrix}\right\}$, από το θεώρημα των τριών καθέτων προκύπτει ότι AB ⊥ ε.

Επειδή $\left\{\begin{matrix} AB \perp \varepsilon \\ A'B \perp \varepsilon \end{matrix}\right\}$, άρα το επίπεδο (BA,BA΄) = σ είναι κάθετο στην ε στο σταθερό σημείο B, οπότε και το επίπεδο σ είναι σταθερό.

Στο σ η AB φαίνεται από το A΄ με ορθή γωνία. Άρα ο γ.τ. του A΄ είναι ο κύκλος διαμέτρου AB του επιπέδου σ.



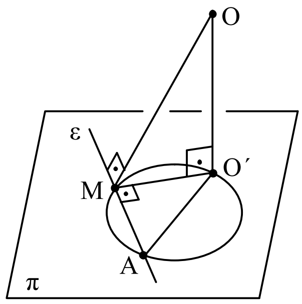
5 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274

Δίνεται επίπεδο π, σημείο A του π και σημείο O εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής του σημείου O στις ευθείες του π που περνάνε από το σημείο A.

Λύση

Θεωρούμε την προβολή O΄ του O στο π, δηλ. OO΄ ⊥ π.

Ευθύ. Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ., δηλ. ΟΜ ⊥ ε. Επειδή $\left.\begin{cases} OO' \perp p \\ OM \perp \varepsilon \end{cases}\right\}$, από το θεώρημα των τριών καθέτων προκύπτει ότι Ο΄Μ ⊥ ε. Επομένως στο επίπεδο π το ευθύγραμμο τμήμα Ο΄Α «φαίνεται» από το Μ με ορθή γωνία. Επομένως το Μ βρίσκεται πάνω στον κύκλο διαμέτρου Ο΄Α του επιπέδου π.



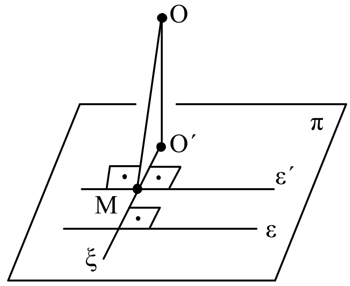
Αντίστροφο. Οι ισχυρισμοί στο ευθύ είναι πλήρως αντιστρεπτοί.
Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος διαμέτρου Ο΄Α του επιπέδου π.
Παρατήρηση. Με τη βοήθεια του θεωρήματος των τριών καθέτων μπορούμε να επεκτείνουμε προτάσεις του επιπέδου στο χώρο.

6 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274

Δίνεται επίπεδο π, ευθεία ε του π και σημείο Ο εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής του σημείου Ο στις ευθείες του π που είναι παράλληλες στην ε.

Λύση

Έστω Ο΄ η προβολή του Ο στο σημείο π.
Ευθύ. Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ., δηλ. ΟΜ ⊥ ε΄, όπου ε΄ // ε. Επειδή είναι και ΟΟ΄ ⊥ π, από το θεώρημα των τριών καθέτων προκύπτει ότι Ο΄Μ ⊥ ε΄. Επειδή ε΄ // ε, θα είναι και Ο΄Μ ⊥ ε, δηλ. το Μ βρίσκεται πάνω στη σταθερή ευθεία ξ που άγεται από το Ο΄ κάθετη στην ε.
Αντίστροφο. Επειδή όλοι οι ισχυρισμοί στο ευθύ είναι αντιστρεπτοί, άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι η ευθεία ε.

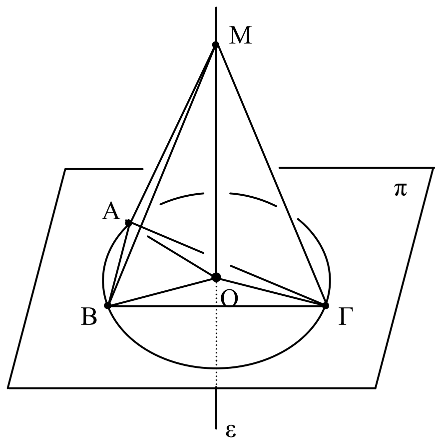


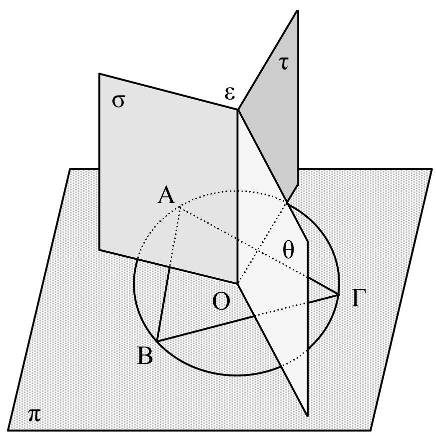
Παρατήρηση. Με τη βοήθεια του θεωρήματος των τριών καθέτων μπορούμε να επεκτείνουμε προτάσεις του επιπέδου στο χώρο.

7 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τις κορυφές ενός τριγώνου.

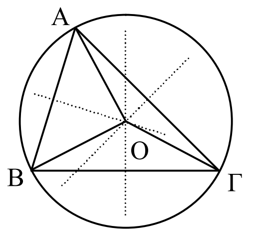
Λύση



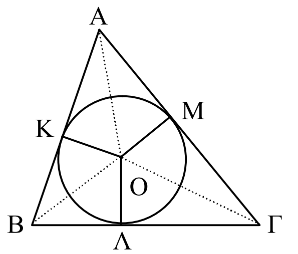


α τρόπος.
Ευθύ. Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ., δηλ. ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ (1), όπου ΑΒΓ τρίγωνο που

βρίσκεται πάνω σε επίπεδο π.
Έστω Ο η προβολή του Μ στο επίπεδο π.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΑ, ΟΜΒ, ΟΜΓ είναι ίσα (λόγω της (1) και γιατί ΟΜ κοινή). Άρα ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ, δηλ. το Ο είναι το περίκεντρο του κύκλου. Επόμένως το τυχαίο σημείο του γ.τ. ανήκει στην ευθεία ε που είναι κάθετη στο π στο περίκεντρο του τριγώνου.
Αντίστροφο. Όλοι οι ισχυρισμοί στο ευθύ αντιστρέφονται, οπότε τελικά ο γ.τ είναι η ευθεία ε.
β τρόπος.
Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο. Τα σημεία του χώρου που ισαπέχουν από τα άκρα της πλευράς ΑΒ ανήκουν στο μεσοκάθετο επίπεδο του ΑΒ. Επίσης, τα σημεία που ισαπέχουν από τα άκρα της πλευράς ΒΓ είναι στο μεσοκάθετο επίπεδο του ΒΓ. Τα δύο επίπεδα τέμνονται σε ευθεία ξ διότι είναι κάθετα σε δύο τεμνόμενες ευθείες, τις ΑΒ και ΒΓ. Τα σημεία της ευθείας ξ ισαπέχουν και από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Άρα και το μεσοκάθετο επίπεδο στην ΑΓ περνάει από την ξ. Η ευθεία ξ είναι κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου, διότι η ξ είναι ορθογώνια στις ΑΒ και ΒΓ.
Οι τομές των μεσοκαθέτων επιπέδων με το επίπεδο του τριγώνου είναι οι μεσοκάθετες στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου. Άρα η ευθεία ξ περνάει από το περίκεντρο του ΑΒΓ και είναι ο ζητούμενος γ.τ.



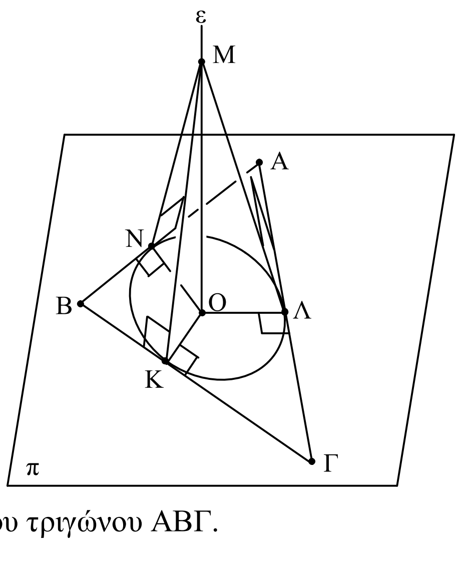
Παρατήρηση 1: Στο επίπεδο το περίκεντρο Ο είναι το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου και ισαπέχει από τις τρείς κορυφές του. Στη Στερεομετρία, «κατ' αναλογίαν» τα σημεία που ισαπέχουν από τις κορυφές του τριγώνου βρίσκονται στην κάθετη στο (Α,Β,Γ) στο σημείο Ο.
Παρατήρηση 2: Στο επίπεδο το έγκεντρο Ο είναι το σημείο τομής των τριών διχοτόμων του τριγώνου και ισαπέχει από τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Στη Στερεομετρία, «κατ' αναλογίαν» τα σημεία που ισαπέχουν από τις πλευρές του τριγώνου βρίσκονται στην κάθετη στο (Α,Β,Γ) στο σημείο Ο. Σχετική είναι και η παρακάτω άσκηση.



Άσκηση. Να βρεθεί ό γ.τ. των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τις πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Ευθύ. Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ., δηλαδή έχουμε το τρίγ. ΑΒΓ πάνω στο επίπεδο π και τις $MK \perp B\Gamma$, $M\Lambda \perp A\Gamma$, $MN \perp AB$, έτσι ώστε $MN = MK = M\Lambda$. Φέρνουμε επίσης τη $MO \perp \pi$ και τις ΟΝ, ΟΛ, ΟΚ.
Επειδή $MO \perp \pi$, άρα $MO \perp ON$, $MO \perp OK$, $MO \perp O\Lambda$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΝ, ΟΜΚ, ΟΜΛ είναι ίσα γιατί η ΟΜ είναι κοινή και $MN = MK = M\Lambda$ από την υπόθεση του γ.τ. Επομένως $OK = O\Lambda = ON$ (1).
Επίσης $\left\{\begin{matrix} MO \perp \pi \\ MN \perp AB \end{matrix}\right\}$, οπότε από θεώρημα των τριών καθέτων προκύπτει ότι $ON \perp AB$. Με τον ίδιο τρόπο είναι $OK \perp B\Gamma$ και $O\Lambda \perp \Gamma A$ (2).

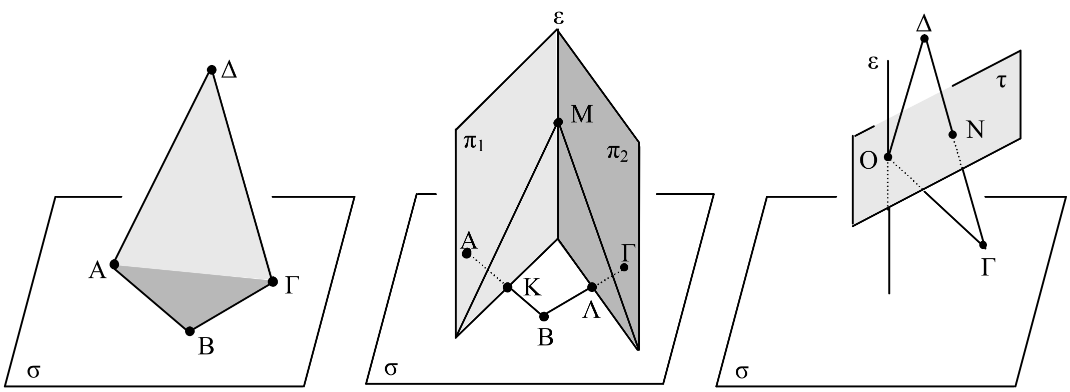


Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι το Ο είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Αντίστροφο. Έστω Ο το έγκεντρο του ΑΒΓ και η κάθετη ευθεία ε από το στο επίπεδο π. Τότε το τυχαίο σημείο Μ της ε είναι σημείο του γ.τ. δηλ. ισαπέχει από τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ (αφού όλοι οι ισχυρισμοί στο ευθύ αντιστρέφονται).
Αρα όζητούμενος γ.τ. είναι η κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ από έγκεντρο.
Παρατήρηση: Αν αντί για «ισαπέχουν από τις πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ» έχουμε ότι «ισαπέχουν από τους φορείς των πλευρώς ενός τριγώνου ΑΒΓ», τότε ο γ.τ. είναι η ένωση των τεσσάρων ευθειών που άγονται κάθετες στο π αοό τα έγκεντρο και τα τρία παράκεντρα.

8 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274
Να βρείτε σημείο του χώρου που ισαπέχει από τέσσερα σημεία, ανά τρία μη συνευθειακά.

Λύση

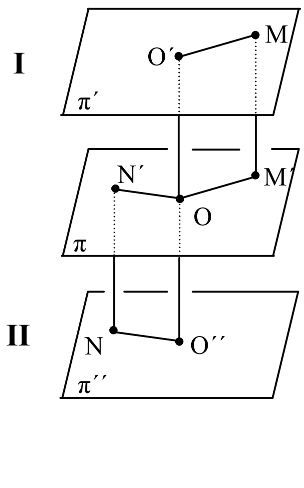


Θεωρούμε καταρχήν τα μεσοκάθετα επίπεδα π_1, π_2 των ευθ. τμημάτων ΑΒ, ΒΓ. Επειδή τα ΑΒ, ΒΓ τέμνονται, άρα και τα π_1, π_2 τέμνονται, έστω κατά την ευθεία ε. Όλα τα σημεία της ε ισαπέχουν από τα Α, Β, αφού η ε ανήκει στο π_1. Όλα τα σημεία της ε ισαπέχουν από τα Β, Γ, αφού η ε ανήκει στο π_2. Επομένως τα σημεία της ε ισαπέχουν από τα Α, Β, Γ.
Θεωρούμε το μεσοκάθετο επίπεδο τ του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ. Ας υποθέσουμε ότι το τα τέμνει την ε στο Ο.
Επειδή το Ο ανήκει στο τ, θα είναι ΟΓ = ΟΔ (1).
Επειδή το Ο ανήκει στην ε, θα είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ (2).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ, δηλαδή το ζητούμενο σημείο είναι το Ο.
Διερεύνηση. Αν το Δ είναι σημείο του π, τότε το επίπεδο τ // ε ή η ε βρίσκεται πάνω στο τ. Στην πρώτη περίπτωση το πρόβλημα είναι αδύνατο, ενώ στη δεύτερη περίπτωση λύση αποτελούν όλα τα σημεία της ε.

9 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274
Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου τα οποία απέχουν απόσταση λ από επίπεδο π.

Λύση

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ο του π και το σταθεροποιούμε. Από το Ο φέρνουμε ευθεία κάθετη στο π και παίρνουμε πάνω σ' αυτήν τα σταθερά σημεία Ο΄ και Ο΄΄ τέτοια ώστε ΟΟ΄ = ΟΟ΄΄ = λ και το Ο΄ να βρίσκεται στον ημίχωρο Ι και το Ο΄΄ στον ημίχωρο ΙΙ.
Εργαζόμαστε στον ημίχωρο Ι.
Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ. που βρίσκεται στον ημίχωρο Ι. Φέρνουμε την ΜΜ΄ ⊥ π, τέτοιο ώστε ΜΜ΄ = λ. Είναι ΜΜ΄ ⊥ π και



ΟΟ΄ $\perp$ π , οπότε ΜΜ΄ // ΟΟ΄. Επειδή $\left\{\begin{matrix} MM'//OO' \\ MM' = OO' = \lambda \end{matrix}\right\}$, άρα το Ο΄ΜΜ΄Ο είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΟΜ // ΟΜ΄. Επειδή ΟΜ΄$\perp$ ΟΟ΄, θα είναι και Ο΄Μ $\perp$ ΟΟ΄, οπότε το Μ βρίσκεται πάνω στο σταθερό επίπεδο π΄ που άγεται από το Ο΄ κάθετο στην ΟΟ΄.

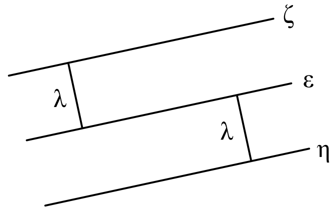
Όλοι οι παραπάνω ισχυρισμοί αντιστρέφονται, οπότε ο γ.τ. που βρίσκεται στον ημίχωρο Ι είναι το επίπεδο π΄.

Εργαζόμαστε στον ημίχωρο ΙΙ.

Όμοια ο γ.τ. που βρίσκεται στον ημίχωρο ΙΙ είναι το επίπεδο π΄΄ που άγεται από το Ο΄΄ κάθετο στην ΟΟ΄.

Τελικά ο γ.τ. είναι η ένωση των επιπέδων π΄, π΄΄.

Παρατήρηση. Ο παραπάνω γ.τ. είναι η επέκταση του αντίστοιχου γ.τ. στο επίπεδο, δηλ. «ο γ.τ. των σημείων ενός επιπέδου που απέχουν από δοσμένη ευθεία απόσταση λ είναι οι δυο παράλληλες ευθείες ξ και η »



10 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 274

Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Μ, σε τυχαία θέση. Να βρείτε επίπεδο που να διέρχεται από το Μ και να ισαπέχει από τα Α, Β και Γ.

Λύση

Έστω π το ζητούμενο επίπεδο π.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(Ι). Το Α βρίσκεται στον ένα ημίχωρο και τα Β, Γ στον άλλο σε σχέση με το επίπεδο π.

Ανάλυση. Φέρνουμε τις ΑΑ΄$\perp$ π, ΒΒ΄$\perp$ π, ΓΓ΄$\perp$ π έτσι ώστε ΑΑ΄ = ΒΒ΄ = ΓΓ = λ.

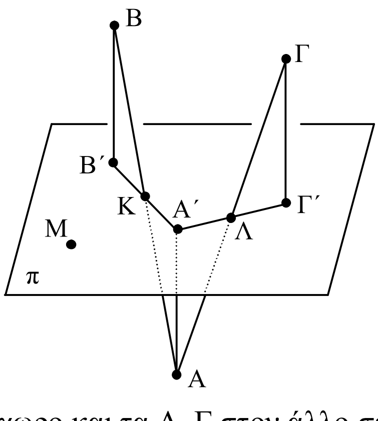
Έστω σ το επίπεδο που καθορίζουν οι ΑΑ΄, ΒΒ΄ και τ το επίπεδο που καθορίζουν οι ΑΑ΄, ΓΓ΄.

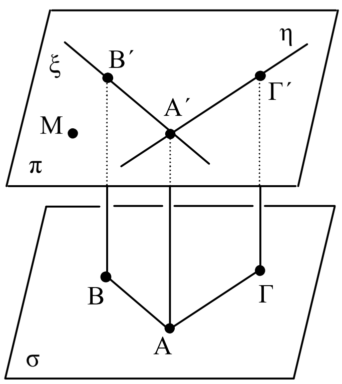
Στο σ το ΒΒ΄ΑΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι ΑΒ, Α΄Β΄ διχοτομούνται στο Κ. Επόμένως το Κ είναι μέσο του ΑΒ και ανήκει στο επίπεδο π (αφούείναι σημείο της Α΄Β΄ και η Α΄Β΄ είναι ευθεία του π.

Όμοια το μέσο Λ του ΑΓ είναι σημείο του π.

Επόμένως τα Κ, Λ, Μ είναι σημεία του π.

Σύνθεση – Απόδειξη. Θεωρούμε τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΑΓ. Τότε το Μ είναι το ζητούμενο επίπεδο (όλοι οι ισχυρισμοί αντιστρέφονται)





(ΙΙ). Το Β βρίσκεται στον ένα ημίχωρο και τα Α, Γ στον άλλο σε σχέση με το επίπεδο π. Εργαζόμαστε όμοια.

(ΙΙΙ). Το Γ βρίσκεται στον ένα ημίχωρο και τα Α, Β στον άλλο σε σχέση με το επίπεδο π. Εργαζόμαστε όμοια.

(ΙV). Τα Α, Β, Γ βρίσκονται στον ίδιο ημίχωρο σε σχέση με το επίπεδο π.

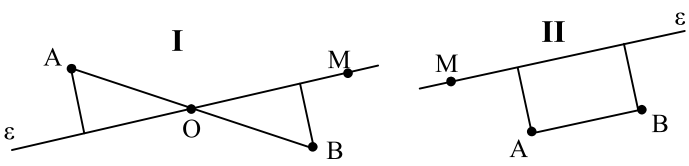
Έστω σ το επίπεδο που καθορίζουν τα Α, Β, Γ

Ανάλυση. Έστω π το ζητούμενο επίπεδο Φέρνουμε Φέρνουμε τις ΑΑ΄⊥ π, ΒΒ΄⊥ π, ΓΓ΄⊥ π έτσι ώστε ΑΑ΄ = ΒΒ΄ = ΓΓ = λ.

Τα ΑΒΒ΄Α΄, ΑΓΓ΄Α΄ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε η ευθεία ξ που καθορίζεται από τα Α΄, Β΄ είναι παράλληλη με την ΑΒ και η ευθεία η που καθορίζεται από τα Α΄, Γ΄ είναι παράλληλη με την ΑΓ

Επομένως το π περιέχει τις τεμνόμενες ευθείες ξ, η και συνεπώς π = (ξ, η), το οποίο είναι παράλληλο με το σ, αφού ξ // ΑΒ και η // ΑΓ. Επίσης το π περιλαμβάνει το Μ.

Σύνθεση – Απόδειξη. Από το Μ φέρνουμε το επίπεδο π // σ = (Α,Β,Γ). Το π είναι το ζητούμενο (όλοι οι ισχυρισμοί αντιστρέφονται)



Παρατήρηση. Η παραπάνω κατασκευή είναι η επέκταση της αντίστοιχης στο επίπεδο, δηλ. της εξής: «Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ σε τυχαία θέση. Να κατασκευασθεί ευθεία που να διέρχεται από το Μ και να ισαπέχει από τα Α, Β». Βεβαίως εδώ έχουμε δυο αντί για τέσσερις περιπτώσεις : Τα Α, Β βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας και τα Α, Β βρίσκονται προς το ίδιο μέρος σε σχέση με την ευθεία.

1 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 274

Αν Α και Β είναι τυχαία σημεία δύο ασύμβατων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ αντίστοιχα, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ για το οποίο ισχύει $\frac{MA}{MB} = λ$, όπου λ γνωστός αριθμός.

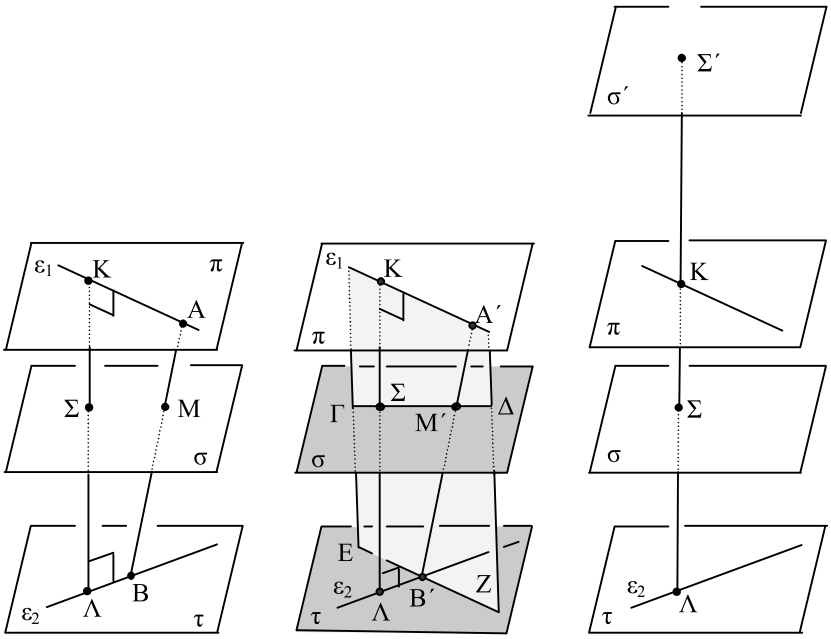
Λύση

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(Ι). Το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ευθ. τμήματος ΑΒ, τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB} = λ$.

Ευθύ. Έστω επίσης ΚΛ η κοινή κάθετος των $ε_1$, $ε_2$, όπου Κ, Λ σημεία των $ε_1$, $ε_2$. Θεωρούμε επίσης τα παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα π, τ που περιέχουν τις $ε_1$, $ε_2$. Από το Μ φέρνουμε το επίπεδο σ // π // τ, το οποίο τέμνει την κοινή κάθετο στο Σ. Από θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{ΚΣ}{ΣΛ} = \frac{AM}{MB}$, οπότε και $\frac{ΚΣ}{ΣΛ} = λ$. Επομένως το Σ είναι σταθερό σημείο του ΚΛ με $\frac{ΚΣ}{ΣΛ} = λ$.

Άρα το τυχαίο σημείο του γ.τ. βρίσκεται πάνω στο σταθερό επίπεδο σ.



Αντίστροφο. Έστω Μ΄ τυχαίο σημείο του σταθερού επιπέδου σ. Θεωρούμε το επίπεδο (Μ΄,ε_1). Το επίπεδο αυτό τέμνει το σ κατά την ΓΔ και το τα κατά την ΕΖ. Έστω Β΄ το κοινό σημείο των ε_2, ΕΖ. Η Β΄Μ΄ τέμνει την ε_1 στο Α΄. Από το θ.Θ. έχουμε $\frac{M'A'}{M'B'}=\frac{K\Sigma}{\Sigma\Lambda}=\lambda$, οπότε το Μ΄ είναι σημείο του γ.τ.

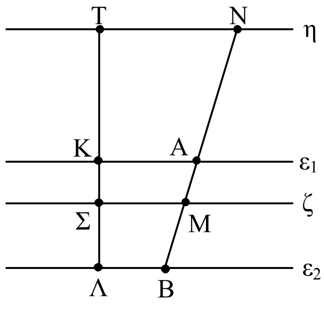
Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι το επίπεδο σ.

(ΙΙ). Το Μ είναι εξωτερικό σημείο του ευθ. τμήματος ΑΒ. Τότε ο γ.τ. είναι το επίπεδο σ΄ που είναι παράλληλο προς τα π, τ από το σημείο Σ΄ που είναι εξωτερικό του ευθ. τμήματος ΑΒ τέτοιο ώστε $\frac{K\Sigma'}{\Sigma'\Lambda}=\lambda$.

Τελικά ο γ.τ. είναι η ένωση των επιπέδων σ, σ΄.

Διερεύνηση. Αν λ=1, τότε ο γ.τ. είναι το μεσοπαράλληλο επίπεδο των π, τ.

Παρατήρηση. Ο παραπάνω γ.τ. είναι ο αντίστοιχος του εξής γ.τ. στο επίπεδο : «Έστω ε_1, ε_2 δυο σταθερές παράλληλες ευθείες πάνω στις οποίες κινούνται τα σημεία Α, Β. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ της ευθείας ΑΒ που έχουν την ιδιότητα $\frac{MA}{MB}=\lambda$, όπου λ σταθερός θετικός αριθμός».

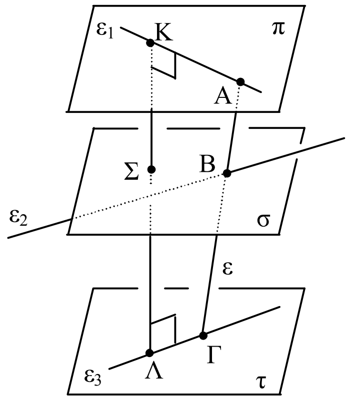


2 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 274

Να κατασκευάσετε ευθεία ε που τέμνει τρεις ασύμβατες ανά δύο ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 σε σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα, ώστε $\frac{AB}{B\Gamma}=\lambda$, όπου λ γνωστός αριθμός και Β εσωτερικό σημείο του ΑΓ.

Λύση

Ανάλυση. Έστω ΑΒΓ η ευθεία που τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ στα σημεία Α, Β $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=λ$. Έστω επίσης ΚΛ η κοινή κάθετος των $ε_1$, $ε_3$, όπου Κ, Λ σημεία των $ε_1$, $ε_3$. Θεωρούμε επίσης τα παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα π, τ που περιέχουν τις $ε_1$, $ε_3$. Από το Β φέρνουμε το επίπεδο σ // π // τ, το οποίο τέμνει την κοινή κάθετο στο Σ. Από θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{ΚΣ}{ΣΛ}=\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$, οπότε και $\frac{ΚΣ}{ΣΛ}=λ$. Επομένως το Σ είναι σταθερό σημείο του ΚΛ με $\frac{ΚΣ}{ΣΛ}=λ$.



Σύνθεση – Απόδειξη. Θεωρούμε την κοινή κάθετο ΚΛ των $ε_1$, $ε_3$ (Κ σημείο της $ε_1$ και Λ σημείο της $ε_3$).Πάνω στο ΚΛ θεωρούμε το σημείο Σ τέτοιο ώστε $\frac{ΚΣ}{ΣΛ}=λ$. Θεωρούμε επίσης τα παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα π, τ που περιέχουν τις $ε_1$, $ε_3$. Από το Σ φέρνουμε το επίπεδο σ // π // τ. Έστω Β το κοινό σημείο του π και της $ε_2$. Στη συνέχεια φέρνουμε ευθεία ε που διέρχεται από το Β και τέμνει τις $ε_1$, $ε_3$ στα Α, Γ (με βάση την άσκηση 1 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 265). Η ε είναι η ζητούμενη, για τι με βάση το θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΚΣ}{ΣΛ}=λ$

Διερεύνηση. Αν $ε_2$ // σ, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.
Αν η $ε_2$ τέμνει το σ, τότε το πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση.
Αν η $ε_2$ βρίσκεται πάνω στο σ, τότε το πρόβλημα δεν έχει άπειρες λύσεις.

3 Αποδεικτική / Σχολικού / σελ. 274

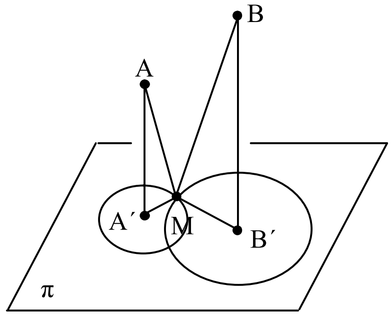
Δίνεται επίπεδο π και σημεία Α, Β εκτός του π. Να κατασκευάσετε σημείο του π, το οποίο να απέχει από τα σημεία Α και Β αποστάσεις μ και ν αντίστοιχα.

Λύση

Φέρνουμε τις ΑΑ΄ ⊥ π και ΒΒ΄ ⊥ π. Έστω ότι (ΑΑ΄) = d και (ΒΒ΄) = s.

Έστω Μ το ζητούμενο σημείο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο Α΄ΜΑ εφαρμόζουμε το Π.θ. : $A'M^2=μ^2-d^2 \Leftrightarrow A'M=\sqrt{μ^2-d^2}$.

Επομένως το Μ ανήκει στον κύκλο $\left(A',\sqrt{μ^2-d^2}\right)$.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο Β΄ΜΒ εφαρμόζουμε το Π.θ. : $B'M^2=ν^2-s^2 \Leftrightarrow B'M=\sqrt{ν^2-s^2}$. Επομένως το Μ ανήκει στον κύκλο $\left(B',\sqrt{ν^2-s^2}\right)$.

Άρα το Μ προσδιορίζεται ως τομή των κύκλων $\left(A',\sqrt{μ^2-d^2}\right)$ και $\left(B',\sqrt{ν^2-s^2}\right)$.

Διερεύνηση : Για να έχουμε λύση πρέπει $μ \geq d$ και $ν \geq s$. Το πλήθος των λύσεων εξαρτάται από τα κοινά σημεία των κύκλων $\left(A',\sqrt{μ^2-d^2}\right)$ και $\left(B',\sqrt{ν^2-s^2}\right)$.

1 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 274

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων ενός επιπέδου π, τα οποία βλέπουν υπό ορθή γωνία δύο σημεία που δε βρίσκονται στο επίπεδο π

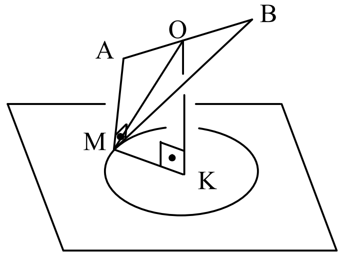
Λύση

Θεωρούμε το μέσο Μ του ΑΒ και το ευθ. τμήμα ΟΚ ⊥ π. Έστω ότι (ΟΚ) = d και (ΑΒ) = μ.

Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ. Είναι $A\hat{M}B = 90^0 \Leftrightarrow OM = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow OM^2 = \dfrac{\mu^2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow OK^2 + KM^2 = \dfrac{\mu^2}{4} \Leftrightarrow KM^2 = \dfrac{\mu^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow KM = \dfrac{\sqrt{\mu^2 - 4d^2}}{2}$,

δηλ. ο γ.τ. είναι ο κύκλος $\left(K, \dfrac{\sqrt{\mu^2 - 4d^2}}{2}\right)$.

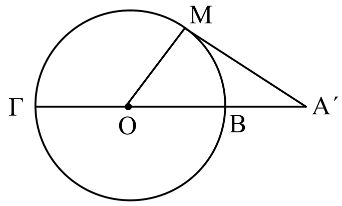


Παρατήρηση. Δεν είναι ανάγκη να γράψουμε και το αντίστροφο, αφού προχωρήσαμε με ισοδυναμίες.

Παρατήρηση. Αν ζητούσαμε το γ.τ. των σημείων του χώρου τα οποία βλέπουν υπό ορθή γωνία το ευθ. τμήμα ΑΒ, τότε θα είχαμε τη σφαίρα διαμέτρου ΑΒ. Η τομή αυτής της σφαίρας με το επίπεδο είναι ο ζητούμενος γ.τ.

2 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 275

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση σημείου Α από τα σημεία ενός κύκλου, όταν το Α δεν ανήκει στο επίπεδο του κύκλου.



Λύση

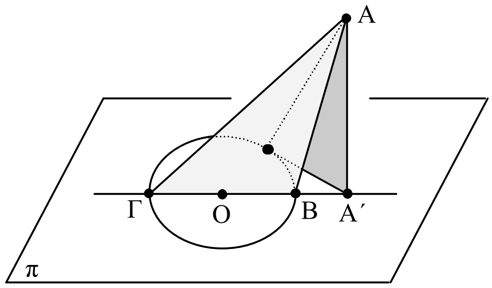
Βοηθητική άσκηση. Στον κύκλο του διπλανού σχήματος ισχύει Α΄Β < Α΄Μ < Α΄Γ (Απόδειξη : Στο τρίγωνο ΟΑ΄Μ έχουμε Α΄Ο – ΟΜ < Α΄Μ < Α΄Ο + ΟΜ ⇔
Α΄Β + ρ – ρ < Α΄Μ < Α΄Ο + ρ ⇔ Α΄Β < Α΄Μ < Α΄Γ (1)).

Λύση της άσκησης. Φέρνουμε την ευθεία ΟΑ΄, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Γ.

Είναι $A'B < A'M < A'\Gamma \Leftrightarrow A'B^2 < A'M^2 < A'\Gamma^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A'B^2 + AA'^2 < A'M^2 + AA'^2 < A'\Gamma^2 + AA'^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB^2 < AM^2 < A\Gamma^2 \Leftrightarrow AB < AM < A\Gamma$.



Παρατήρηση. Υπάρχει αντίστοιχη ανισότητα στην Επιπεδομετρία, που είναι η ανισότητα (1) και περιγράφεται στο πρώτο σχήμα.

3 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 275

Να κατασκευάσετε επίπεδο που να περνάει από ευθεία ε και να ισαπέχει από δύο σημεία Α και Β εκτός της ε.

Λύση

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(Ι). Τα Α, Β βρίσκονται εκατέρωθεν του επιπέδου π που αναζητούμε.

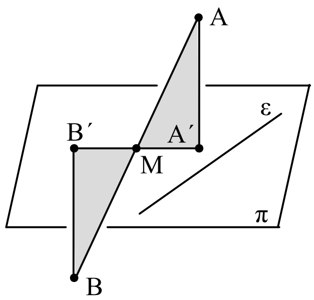
Ανάλυση. Έστω π το ζητούμενο επίπεδο με ΑΑ΄⊥ π, ΒΒ΄⊥ π, όπου ΑΑ΄= ΒΒ΄ και Μ το σημείο τομής των ΑΒ και Α΄Β΄. Τα τρίγωνα ΜΑΑ΄, ΜΒΒ΄ είναι ορθογώνια και ίσα. Άρα ΜΑ = ΜΒ, δηλ.το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

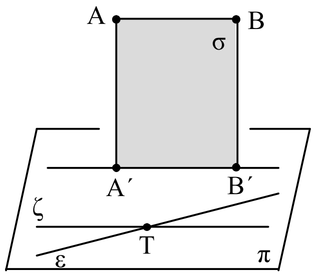
Σύνθεση - Απόδειξη. Θεωρούμε το μέσο Μ του ευθ. τμήματος ΑΒ. Θεωρούμε το επίπεδο π = (ε,Μ). Το επίπεδο π είναι το ζητούμενο γιατί αν θεωρήσουμε τις ΑΑ΄ ⊥ π και ΒΒ΄⊥π, τότε $AA' \perp A'M$, $BB' \perp B'M$.

Συγκρίνουμε τα ορθ. τρίγωνα Β΄ΒΜ, Α΄ΑΜ. Έχουν ΜΑ=ΜΒ $A'\hat{M}A = B'\hat{M}B$, οπότε $B'\overset{\Delta}{B}M = A'\overset{\Delta}{A}M$. Άρα ΑΑ΄ = Β Β΄, δηλ. τα Α, Β ισαπέχουν από το π.

Διερεύνηση. Αν το Μ είναι σημείο της ε, τότε το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις, αφού κάθε επίπεδο που διέρχεται από την ε είναι δεκτό. Αν το Μ δεν είναι σημείο της ε, τότε το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

(ΙΙ). Τα Α, Β βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με το επιπέδο π που αναζητούμε.



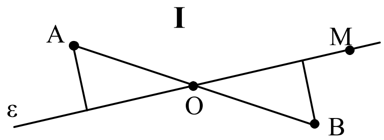


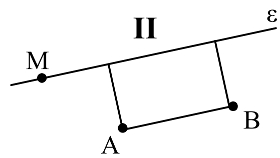
Ανάλυση. Έστω π το ζητούμενο επίπεδο με ΑΑ΄⊥ π, ΒΒ΄⊥ π, όπου ΑΑ΄= ΒΒ΄. Θεωρούμε το επίπεδο σ = (ΑΑ΄, ΒΒ΄), που τέμνει το π κατά την Α΄Β΄. Επειδή ΑΑ΄Β΄Β είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΑΒ // Α΄Β΄. Επομένως θα είναι και ΑΒ //π.

Από τυχαίο σημείο Τ της ε φέρνουμε την ζ // Α΄Β΄. Τότε είναι και ζ // ΑΒ. Τότε το π καθορίζεται από την ε και από την παράλληλη ζ της ΑΒ από τυχαίο σημείο Τ. Το π είναι σταθερό.

Σύνθεση. Από τυχαίο σημείο Τ της ε φέρνουμε την ζ // ΑΒ. Το ζητούμενο επίπεδο είναι το π = (ζ,ε), γιατί όλοι οι προηγούμενοι συλλογισμοί αντιστρέφονται.

Παρατήρηση. Η παραπάνω κατασκευή είναι η επέκταση της αντίστοιχης στο επίπεδο, δηλ. της εξής: «Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ σε τυχαία θέση. Να κατασκευασθεί ευθεία που να διέρχεται από το Μ και να ισαπέχει από τα Α, Β». Βεβαίως εδώ έχουμε δυο αντί για τέσσερις περιπτώσεις : Τα Α, Β βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας και τα Α, Β βρίσκονται προς το ίδιο μέρος σε σχέση με την ευθεία.





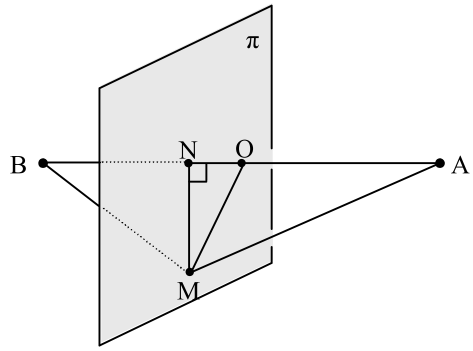
4 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 275

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του χώρου, για τα οποία ισχύει η σχέση $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$, όπου Α και Β σταθερά σημεία και λ σταθερό μήκος.

Λύση

Επειδή $MA^2 - MB^2 = \lambda^2 > 0$, άρα ΜΑ > ΜΒ.

Ανάλυση. Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ. Φέρνουμε την ΜΝ ⊥ ΑΒ. Επειδή ΜΑ > ΜΒ, θα είναι και ΝΑ > ΝΒ. Έτσι, αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ, τότε το Ν είναι εσωτερικό σημείο του ΟΒ. Επίσης έχουμε $\begin{Bmatrix} MA^2 = MN^2 + NA^2 \\ MB^2 = MN^2 + NB^2 \end{Bmatrix}$. Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε ότι $MA^2 - MB^2 = NA^2 - NB^2$. Όμως $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$,



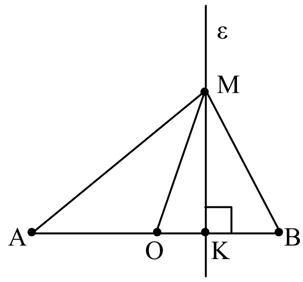
οπότε είναι $NA^2 - NB^2 = \lambda^2 \Leftrightarrow (NA + NB)\cdot(NA - NB) = \lambda^2 \Leftrightarrow AB\cdot(NA - NB) = \lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB\cdot\left[(NO + OA) - (OB - ON)\right] = \lambda^2 \Leftrightarrow 2\cdot AB\cdot ON = \lambda^2 \Leftrightarrow ON = \dfrac{\lambda^2}{2\cdot AB}$. Επειδή το AB σταθερό ευθ. τμήμα, άρα το N είναι σταθερό σημείο και το M βρίσκεται στο σταθερό αυτό επίπεδο που είναι κάθετο στην AB στο σημείο N.

Ανάλυση. Στο ευθ. τμήμα OB θεωρούμε σημείο N τέτοιο ώστε $ON = \dfrac{\lambda^2}{2\cdot AB}$. Στο N παίρνουμε το κάθετο επίπεδο π στην AB. Τότε το τυχαίο σημείο M του π είναι σημείο του γ.τ. γιατί : Αν φέρουμε τα MB, MN, MO, MA, θα είναι $MN \perp AB$ και $\begin{Bmatrix} MA^2 = MN^2 + NA^2 \\ MB^2 = MN^2 + NB^2 \end{Bmatrix}$. Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε ότι $MA^2 - MB^2 = NA^2 - NB^2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = (NA + NB)(NA - NB) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = AB\cdot 2\cdot ON \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = AB\cdot 2\cdot\dfrac{\lambda^2}{2\cdot AB} \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \lambda^2$.

Παρατήρηση. Ο παραπάνω γ.τ. είναι η επέκταση του αντίστοιχου γ.τ. στο επίπεδο, δηλ. ο εξής: «Δίνονται τα σταθερά σημεία A, B. Να βρεθεί ο γ.τ. του σημείου M με την ιδιότητα $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$, όπου λ σταθερό ευθ. τμήμα». Ο γ.τ. είναι ευθεία κάθετη στην ε. Το θέμα αυτό μπορεί να αντιμετωπισθεί και με το β θεώρημα των διαμέσων.



5 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 275

Να αποδείξετε ότι για να είναι ορθογώνια δύο τμήματα AB και ΓΔ πρέπει και αρκεί να είναι: $\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - \Delta B^2$.

Λύση

(I). Ας υποθέσουμε ότι τα AB, ΓΔ είναι ορθογώνια. Τότε, σύμφωνα με την άσκηση 3 Εμπέδωσης / Σχολικού / σελ. 273, υπάρχει επίπεδο π που περιέχει την AB και είναι κάθετο στην ΓΔ στο σημείο M. Φέρνουμε τις MA, MB που είναι κάθετες στην ΓΔ (αφού $\Gamma\Delta \perp \pi$).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΑΓ εφαρμόζουμε το Π.θ. : $A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΓ εφαρμόζουμε το Π.θ. : $B\Gamma^2 = BM^2 + M\Gamma^2$.

Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

$A\Gamma^2 - B\Gamma^2 = AM^2 - BM^2$ (1)

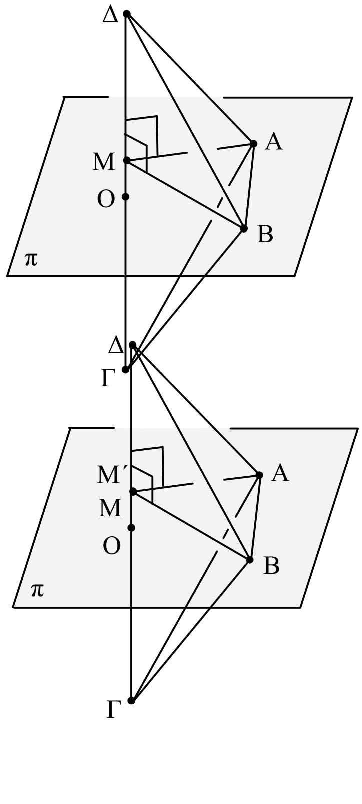
Στο ορθ. τρίγωνο ΜΑΔ εφαρμόζουμε το Π.θ. : $\Delta A^2 = AM^2 + M\Delta^2$.

Στο ορθ. τρίγωνο ΜΒΔ εφαρμόζουμε το Π.θ. : $B\Delta^2 = BM^2 + M\Delta^2$.

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω σχέσεων έχουμε ότι $\Delta A^2 - B\Delta^2 = AM^2 - BM^2$ (2)

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - B\Delta^2$

(II). Ας υποθέσουμε ότι ¨



$\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - B\Delta^2 \Leftrightarrow \Gamma A^2 - \Delta A^2 = \Gamma B^2 - B\Delta^2$ (3)

Διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις :

(ΙΙα). $\Gamma A^2 - \Delta A^2 = \Gamma B^2 - \Delta B^2 = 0$. Τότε $\left\{\begin{matrix} A\Delta = A\Gamma \\ B\Delta = B\Gamma \end{matrix}\right\}$, οπότε τα Α, Β βρίσκονται στο μεσοκάθετο επίπεδο της ΓΔ. Άρα ΑΒ, ΓΔ ορθογώνιες.

(ΙΙβ). $\Gamma A^2 - \Delta A^2 = \Gamma B^2 - \Delta B^2 > 0$. Τότε ΑΓ > ΑΔ (4) και ΒΓ > ΒΔ. (5).

Από τα Α, Β φέρνουμε τις κάθετες ΑΜ και ΑΜ΄ προς την ΓΔ. Θα είναι και ΜΓ>ΜΔ (6) και Μ΄Γ > Μ΄Δ (7), λόγω των (4), (5).

Είναι $\left\{\begin{matrix} A\Gamma^2 = MA^2 + M\Gamma^2 \\ A\Delta^2 = MA^2 + M\Delta^2 \end{matrix}\right\}$. Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι :

$$A\Gamma^2 - A\Delta^2 = M\Gamma^2 - M\Delta^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 - A\Delta^2 = (M\Gamma + M\Delta)(M\Gamma - M\Delta) \Leftrightarrow$$

$$A\Gamma^2 - A\Delta^2 = \Gamma\Delta(M\Gamma - M\Delta) \Leftrightarrow A\Gamma^2 - A\Delta^2 = \Gamma\Delta\left[(MO + O\Gamma) - (O\Delta - OM)\right]$$

$A\Gamma^2 - A\Delta^2 = 2 \cdot OM \cdot \Gamma\Delta$ (8), όπου Ο το μέσο του ΓΔ.

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε $B\Gamma^2 - B\Delta^2 = 2 \cdot OM' \cdot \Gamma\Delta$ (9).

Από τις (8), (9) και την (3) προκύπτει $2 \cdot OM \cdot \Gamma\Delta = 2 \cdot OM' \cdot \Gamma\Delta \Rightarrow OM = OM'$, οπότε ΟΜ = ΟΜ΄. Επομένως τα σημεία Μ, Μ΄ ταυτίζονται.

Αφού ΜΑ και ΜΒ είναι κάθετες στην ΓΔ, άρα ορίζουν επίπεδο π κάθετο στη ΓΔ στο Μ. Τότε ΑΒ, ΓΔ ορθογώνιες.

(ΙΙγ). $\Gamma A^2 - \Delta A^2 = \Gamma B^2 - \Delta B^2 < 0$. Όμοια

Παρατήρηση. Υπάρχει αντίστοιχη πρόταση στην Επιπεδομετρία : Οι φορείς των ευθ. τμημάτων ΑΒ και ΓΔ τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν $\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - \Delta B^2$.

6 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 275

Να αποδείξετε ότι αν Α, Β, Γ, Δ τέσσερα σημεία που δεν είναι συνεπίπεδα και δύο από τα ζεύγη τμημάτων (ΑΒ, ΓΔ), (ΑΓ, ΔΒ), (ΑΔ, ΓΒ) είναι ορθογώνια, τότε και το τρίτο ζεύγος είναι ορθογώνιο.

Λύση

Υποθέτουμε ότι τα (ΑΒ, ΓΔ), (ΑΓ, ΔΒ) είναι δυο ζεύγη ορθογώνιων τμημάτων. Θα αποδείξουμε ότι και το ζεύγος (ΑΔ, ΓΒ) είναι ορθογώνιο.

Επειδή τα (ΑΒ, ΓΔ) είναι ορθογώνια, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - \Delta B^2$ (1).

Επειδή τα (ΑΒ, ΓΔ) είναι ορθογώνια, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - \Delta B^2$ (1).

Επειδή τα (ΑΓ, ΔΒ) είναι ορθογώνια, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $\Delta A^2 - \Delta\Gamma^2 = BA^2 - B\Gamma^2$ (2).

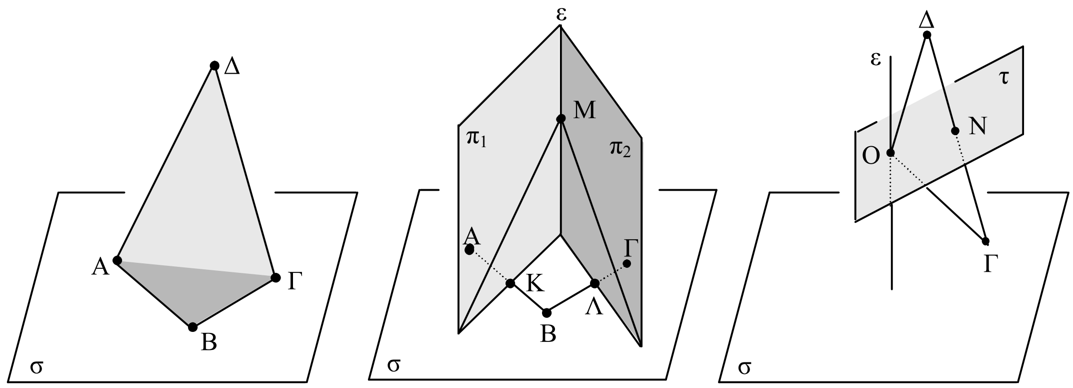
Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2) : $\Gamma A^2 - \Gamma B^2 + \Delta A^2 - \Delta\Gamma^2 = \Delta A^2 - \Delta B^2 + BA^2 - B\Gamma^2$, άρα $\Gamma A^2 - \Gamma\Delta^2 = BA^2 - B\Delta^2$, οπότε με βάση πάλι την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι το ζεύγος (ΑΔ, ΓΒ) είναι ορθογώνιο.

7 Σύνθετη / Σχολικού / σελ. 275

Να αποδείξετε ότι αν ΑΒΓΔ είναι στρεβλό τετράπλευρο, τότε τα έξι μεσοκάθετα επίπεδα στις πλευρές και τις διαγωνίους του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θεωρούμε καταρχήν τα μεσοκάθετα επίπεδα $π_1$, $π_2$ των ευθ. τμημάτων ΑΒ, ΒΓ. Επειδή τα ΑΒ, ΒΓ τέμνονται, άρα και τα $π_1$, $π_2$ τέμνονται, έστω κατά την ευθεία ε. Όλα τα σημεία της ε ισαπέχουν από τα Α, Β, αφού η ε ανήκει στο $π_1$. Όλα τα σημεία της ε ισαπέχουν από τα Β, Γ, αφού η ε ανήκει στο $π_2$. Επομένως τα σημεία της ε ισαπέχουν από τα Α, Β, Γ.
Θεωρούμε το μεσοκάθετο επίπεδο τ του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ. Ας υποθέσουμε ότι το τα τέμνει την ε στο Ο.



Επειδή το Ο ανήκει στο τ, θα είναι ΟΓ = ΟΔ (1).
Επειδή το Ο ανήκει στην ε, θα είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ (2).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ.
Επειδή ΟΑ = ΟΒ, το Ο ανήκει στο μεσοκάθετο επίπεδο του ΑΒ.
Επειδή ΟΒ = ΟΓ, το Ο ανήκει στο μεσοκάθετο επίπεδο του ΒΓ.
Επειδή ΟΓ = ΟΔ, το Ο ανήκει στο μεσοκάθετο επίπεδο του ΓΔ.
Επειδή ΟΔ = ΟΑ, το Ο ανήκει στο μεσοκάθετο επίπεδο του ΔΑ.
Επειδή ΟΑ = ΟΓ, το Ο ανήκει στο μεσοκάθετο επίπεδο του ΑΓ.
Επειδή ΟΒ = ΟΔ, το Ο ανήκει στο μεσοκάθετο επίπεδο του ΒΔ.
Άρα τα έξι μεσοκάθετα επίπεδα διέρχονται από το ίδιο σημείο, το Ο.
Παρατήρηση. Αν θεωρήσουμε τη σφαίρα με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ, η σφαίρα αυτή θα διέρχεται από τα Α, Β, Γ, Δ, δηλ. είναι η περιγεγραμμένη σφαίρα του τετραέδρου ΑΒΓΔ.
Είναι η επέκταση του περιγεγραμμένου σε τρίγωνο κύκλου στο χώρο.

8 Σύνθετη / Σχολικού / σελ 275

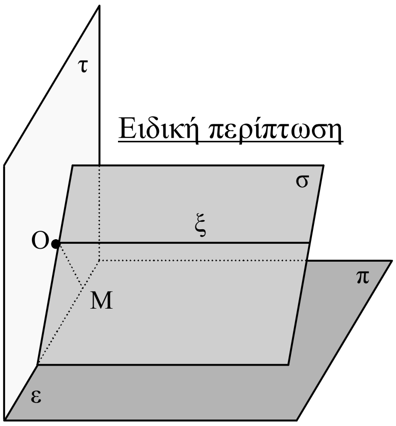
Δίνεται επίπεδο π, ευθεία ε του π και σημείο Ο εκτός του π. Έστω Μ τυχαίο σημείο της ε και σ επίπεδο κάθετο στην ΟΜ στο Ο. Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα σ διέρχονται από σταθερό σημείο του π.

Λύση

Θεωρούμε το επίπεδο τ που καθορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο Ο. Τα επίπεδα π και τ τέμνονται προφανώς κατά την ευθεία ε. Από το σημείο Ο φέρνουμε την κάθετη ευθεία ξ προς το επίπεδο τ, η οποία τέμνει το επίπεδο π στο σταθερό σημείο Κ.
Έστω Μ τυχαίο σημείο της ε. Τότε η ΟΜ είναι ευθεία του τ. Επειδή $ξ \perp τ$, άρα $ξ \perp ΟΜ$.
Φέρνουμε τώρα το επίπεδο σ κάθετο στην ΟΜ στο Ο. Επειδή είναι και $ξ \perp ΟΜ$., άρα η ευθεία ξ ανήκει στο επίπεδο σ.

Επειδή το Κ είναι σημείο της ξ και η ξ είναι ευθεία του σ, άρα το Κ είναι σημείο του σ.
Επειδή το Κ είναι κοινό σημείο των επιπέδων π και σ, άρα η τομή η των π και σ διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ.

Διερεύνηση. Στην ειδική περίπτωση που η ευθεία ξ είναι παράλληλη στο επίπεδο π, τότε το επίπεδο σ διέρχεται από την ξ και τέμνει το επίπεδο π κατά την η //ξ. Επομένως όλα τα επίπεδα σ τέμνουν το π κατά ευθείες παράλληλες στη ξ, δηλ. κατά ευθείες που είναι μεταξύ τους παράλληλες (δηλ. «συντρέχουν κατ' εκδοχήν»).



Ειδική περίπτωση