Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

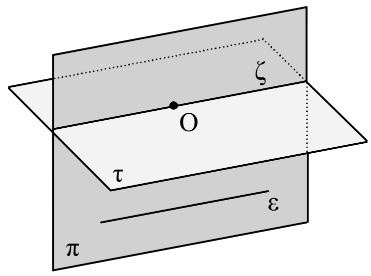
Χίος, Μάρτης του 2017

Σχεδίαση γεωμ. σχημάτων του χώρου στο τετράδιο και στον πίνακα

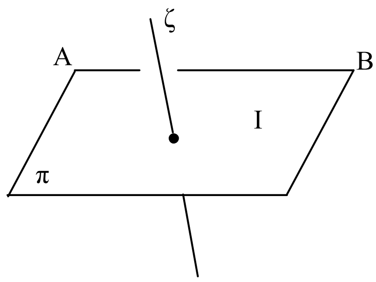
Για να σχεδιάσουμε σχήματα στο χώρο ακολουθούμε τις εξής γενικές αρχές :

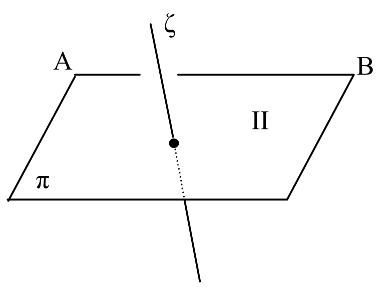
(i). Ένα επίπεδο παριστάνεται με ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο (για να δίνεται έτσι η αίσθηση της προοπτικής στο χώρο). Συμβολίζεται συνήθως με π, σ, τ, κ.λ.π.

(ii). Αρκετές φορές ένα επίπεδο γραμμοσκιάζεται με απόχρωση του γκρί. Αυτό το κάνουμε συνήθως όταν έχουμε πολλά επίπεδα που τέμνονται μεταξύ τους. Είναι φανερό ότι όταν έχουμε περισσότερα από ένα τεμνόμενα επίπεδα, τότε χρησιμοποιούμε διαφορετικές αποχρώσεις του γκρί.

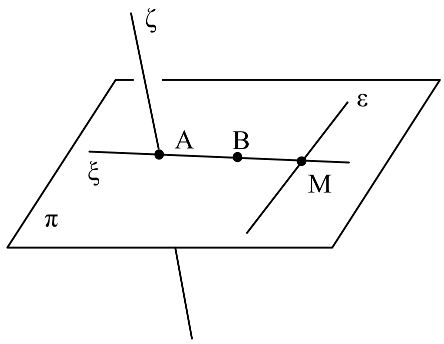


(iii). Για να σχεδιάσουμε μια ευθεία που τέμνει ένα επίπεδο σχεδιάζουμε είτε το σχήμα Ι είτε το σχήμα ΙΙ. Προσέχουμε (στο σχήμα ΙΙ) ότι το κομμάτι της ευθείας γραμμής που βρίσκεται πίσω από το επίπεδο είναι διακεκομμένο. Προσέχουμε επίσης ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (και στα δυο σχήματα) διακόπτεται (κόβεται στα δυο). Με τον τρόπο αυτό εννοούμε ότι η ευθεία ζ βρίσκεται «μπροστά» από το ευθ. τμήμα ΑΒ.





(iv). Με βάση τα παραπάνω στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα επίπεδο π, πάνω στο οποίο βρίσκεται οι ευθείες ξ και ε (οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ του π. Η ευθεία ζ τέμνει το επίπεδο π στο σημείο Α (που είναι κοινό σημείο των ευθειών ζ και ξ. Επίσης οι ευθείες ε και ζ είναι ασύμβατες.

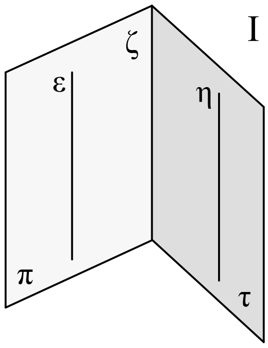


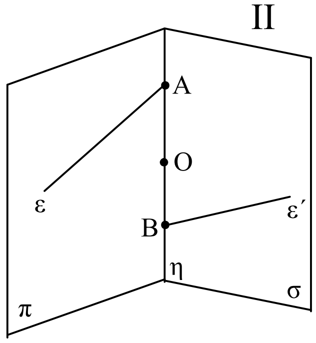
(v). Για να σχεδιάσουμε δυο τεμνόμενα επίπεδα προτείνω τους παρακάτω δυο τρόπους :

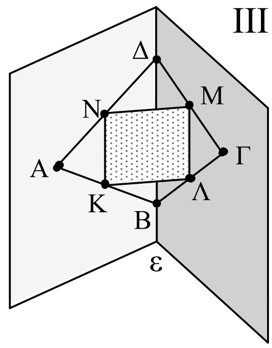
α τρόπος. Τα δυο επίπεδα έχουν τη μορφή ανοικτού βιβλίου. Μπορεί να είναι ή όχι χρωματισμένα με αποχρώσεις του γκρι (σχήμα Ι και ΙΙ). Στο σχήμα Ι έχουμε τα επίπεδα π και τ, τα οποία τέμνονται κατά την ευθεία ζ και οι ευθείες ε, η βρίσκονται πάνω στα επίπεδα π, τ. Επίσης ε // ζ // η.

Στο σχήμα ΙΙ τα επίπεδα π και σ τέμνονται κατά την ευθεία η. Οι ευθείες ε και ε΄ βρίσκονται πάνω στα επίπεδα π και σ και τέμνουν την η στα σημεία Α και Β.

Στο σχήμα ΙΙΙ θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (τα Α, Β, Γ, Δ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο) και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Για να γίνει κατανοητό ότι τα Α, Β, Γ, Δ δεν είναι συνεπίπεδα, τα τοποθετούμε πάνω στα τεμνόμενα επίπεδα π, σ ως εξής : Τα Δ, Β πάνω στην τομή ε των δυο επιπέδων, το Α πάνω στο π και το Γ πάνω στο σ. Τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν, επειδή είναι κορυφές παραλληλογράμμου, είναι συνεπίπεδα και βρίσκονται πάνω στο σημειοσκιασμένο επίπεδο. Μέρος της ευθείας ε βρίσκεται πίσω από το σημειοσκιασμένο επίπεδο, γι’ αυτό και δεν «φαίνεται».



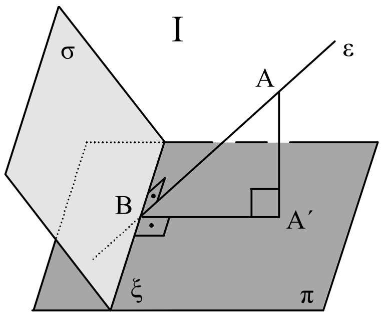


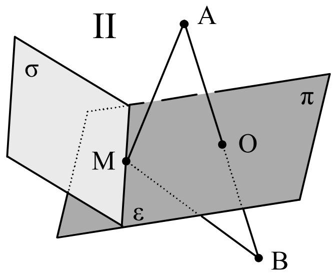


β τρόπος. Τα δυο τεμνόμενα επίπεδα π και σ σχεδιάζονται όπως στα διπλανά σχήματα Ι και ΙΙ. Συγκεκριμένα :

Στο σχήμα Ι τα π και σ τέμνονται κατά την ευθεία ξ. Μέρος του επιπέδου π βρίσκεται «πίσω» από το σ. Το μέρος αυτό δεν έχει το χρώμα του π. Επίσης μέρος του παραλληλογράμμου (που παριστάνει το π) «δεν φαίνεται » και γι’ αυτό είναι διακεκομμένο. Η ευθεία ε τέμνει την τομή ξ των δυο επιπέδων στο Β και είναι κάθετη στην ξ. Η ΑΑ΄ είναι κάθετη στο π και από το θεώρημα των τριών καθέτων είναι και Α΄Β $\perp$ ξ.

Στο σχήμα ΙΙ τα π και σ τέμνονται κατά την ευθεία ε. Συγκεκριμένα το π είναι το μεσοκάθετο επίπεδο του ΑΒ. Μέρος του επιπέδου π βρίσκεται «πίσω» από το σ. Το μέρος αυτό δεν έχει το χρώμα του π. Επίσης μέρος του παραλληλογράμμου (που παριστάνει το π) «δεν φαίνεται » και για το λόγο αυτό είναι διακεκομμένο. Η πλευρά του παραλληλογράμμου που βρίσκεται πίσω από την ε «κόβεται» σε δυο τμήματα.



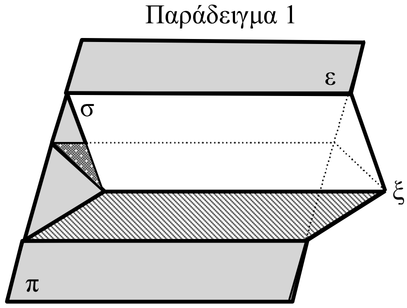


(vi). Ορθές γωνίες. Μια ορθή γωνία στο χώρο δεν «φαίνεται» ως ορθή, λόγω της προοπτικής σχεδίασης. Για να είναι λοιπόν το σχήμα πιο «αληθοφανές», καλό είναι, όπου υπάρχει ορθή γωνία, αυτή να σημειώνεται με . Για παράδειγμα στο σχήμα Ι του (v) έχουμε σχεδιάσει και τις τρεις ορθές γωνίες που υπάρχουν.

(vii). **Παραδείγματα.**

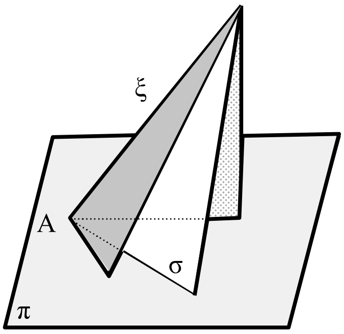
Παράδειγμα 1. Στο παράδειγμα 1 έχουμε ένα επίπεδο π και μια ευθεία ξ παράλληλη προς το π. Από την ξ διέρχονται τρία επίπεδα που τέμνουν το π κατά παράλληλες μεταξύ τους και προς την ξ ευθείες. Για να έχουμε καλύτερη αίσθηση του χώρου ένα επίπεδο είναι λευκό, ένα γκριζαρισμένο και δυο

Παράδειγμα 1



γραμμοσκιασμένα. Προσέχουμε τα μέρη των επιπέδων που βρίσκονται πίσω από άλλα επίπεδα να μην φαίνονται και μέρος των γραμμών τους να είναι διακεκομμένες.

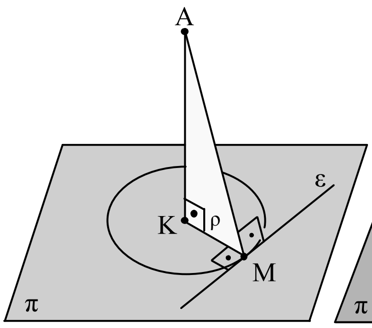
Παράδειγμα 2



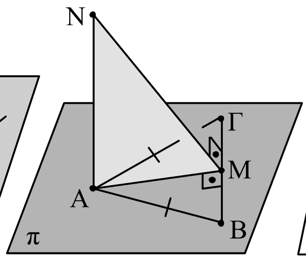
Παράδειγμα 2. Στο παράδειγμα 2 έχουμε ένα επίπεδο π και μια ευθεία ξ που τέμνει το π. Από την ευθεία ξ διέρχονται επίσης τρία επίπεδα που τέμνουν το π κατά ευθείες που διέρχονται όλες από το Α. Για να έχουμε καλύτερη αίσθηση του χώρου δυο επίπεδα είναι γκριζαρισμένα, ένα είναι λευκό και ένα γραμμοσκιασμένο. Προσέχουμε τα μέρη των επιπέδων που βρίσκονται πίσω από άλλα επίπεδα να μην φαίνονται και μέρος των γραμμών τους να είναι διακεκομμένες.

Παρατήρηση. Στα επόμενα παραδείγματα κάνουμε σχήματα που αναφέρονται στο θεώρημα των τριών καθέτων.

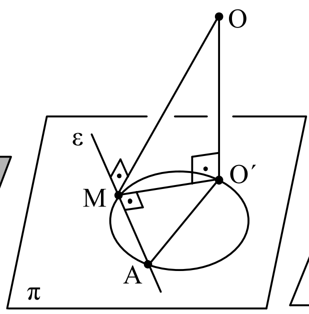
Παράδειγμα 3



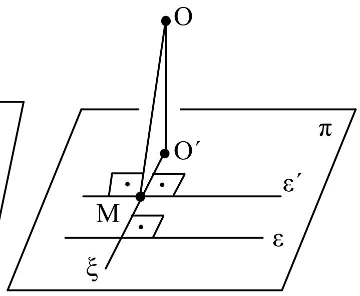
Παράδειγμα 4



Παράδειγμα 5



Παράδειγμα 6



Παράδειγμα 3. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε ένα επίπεδο π και πάνω σε αυτό τον κύκλο (Κ,ρ) (ο οποίος σε προοπτική σχεδίαση φαίνεται σαν έλλειψη). Από το Κ φέρνουμε την ΚΑ ⊥ π. Επίσης στο Μ έχουμε την εφαπτομένη ε του κύκλου που βρίσκεται πάνω στο π. Έχουμε επίσης την ΑΜ. Το επίπεδο (Α,Κ,Μ) είναι γκριζαρισμένο πιο ελαφρά από το επίπεδο. Το επίπεδο (Α,Κ,Μ) φράζει λίγο το π. Τα φραγμένα μέρη του π δεν φαίνονται. Έχουμε επίσης σχεδιάσει και τις τρεις ορθές γωνίες του σχήματος.

Παράδειγμα 4. Εδώ έχουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) του επιπέδου π (λόγω προοπτικής σχεδίασης δεν φαίνεται ισοσκελές, οπότε βάζουμε τις δυο γραμμούλες για να δείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ). Το Μ το μέσο του ΒΓ και η ΑΝ ⊥ π. Κατά τα λοιπά ισχύουν όσα είπαμε στο παράδειγμα 3.

Παράδειγμα 5. Έχουμε έναν κύκλο διαμέτρου Ο΄Α στο π (φαίνεται σαν έλλειψη), την ΟΟ΄ ⊥ π και την ΑΜ τέμνουσα του κύκλου. Λόγω του θεωρήματος των τριών καθέτων έχουμε τρεις ορθές γωνίες, οι οποίες σημειώνονται στο σχήμα. Εδώ δεν χρειάστηκε να βάλουμε χρώματα και αποχρώσεις του γκρι. Το περίγραμμα του επιπέδου π διακόπτεται σε δυο σημεία γιατί είναι πίσω από τα (Ο,Ο΄,Μ).

Παράδειγμα 6. Έχουμε ένα επίπεδο π, δυο ευθείες ε // ε΄ του π και την ΟΟ΄ ⊥ π.. Η ξ είναι ευθεία του π κάθετη στις ε, ε΄. Λόγω του θεωρήματος των τριών καθέτων έχουμε τρεις ορθές γωνίες που όλες είναι σχεδιασμένες. Το επίπεδο (Ο,Ο΄,Μ) κρύβει μέρος του επιπέδου π.